

Prof. Dr. Alfred Toth

Eine Darstellung der Diedergruppe D_6 der Ordnung 12 für semiotische Oktonionen

1. Ein Oktonion kann in der folgenden Normalform dargestellt werden

$$x = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k + x_4l + x_5il + x_6jl + x_7kl$$

und das konjugierte Oktonion als

$$x^* = x_0 - x_1i - x_2j - x_3k - x_4l - x_5il - x_6jl - x_7kl$$

Dementsprechend können wir ein semiotisches Oktonion notieren als

$$ZR^9 = \langle \langle \pm 9. al \rangle \langle \pm 8. bil \rangle \langle \pm 7. \pm cjl \rangle, \langle \pm 6. \pm dkl \rangle, \langle \pm 5. \pm ek \rangle, \langle \pm 4. \pm fj \rangle, \langle \pm 3. \pm gi \rangle, \langle \pm 2. \pm hi \rangle, \langle \pm 1. \pm xi \rangle \rangle,$$

wobei die Verwendung des \pm -Zeichens nicht nur die sofortige Umwandlung eines semiotischen Oktonions in sein Konjugiertes, sondern auch, entsprechend der Verhältnisse bei den Quaternionen, die Umwandlung in die Inversen (Negativen) und konjugiert Inversen ermöglicht (Toth 2009).

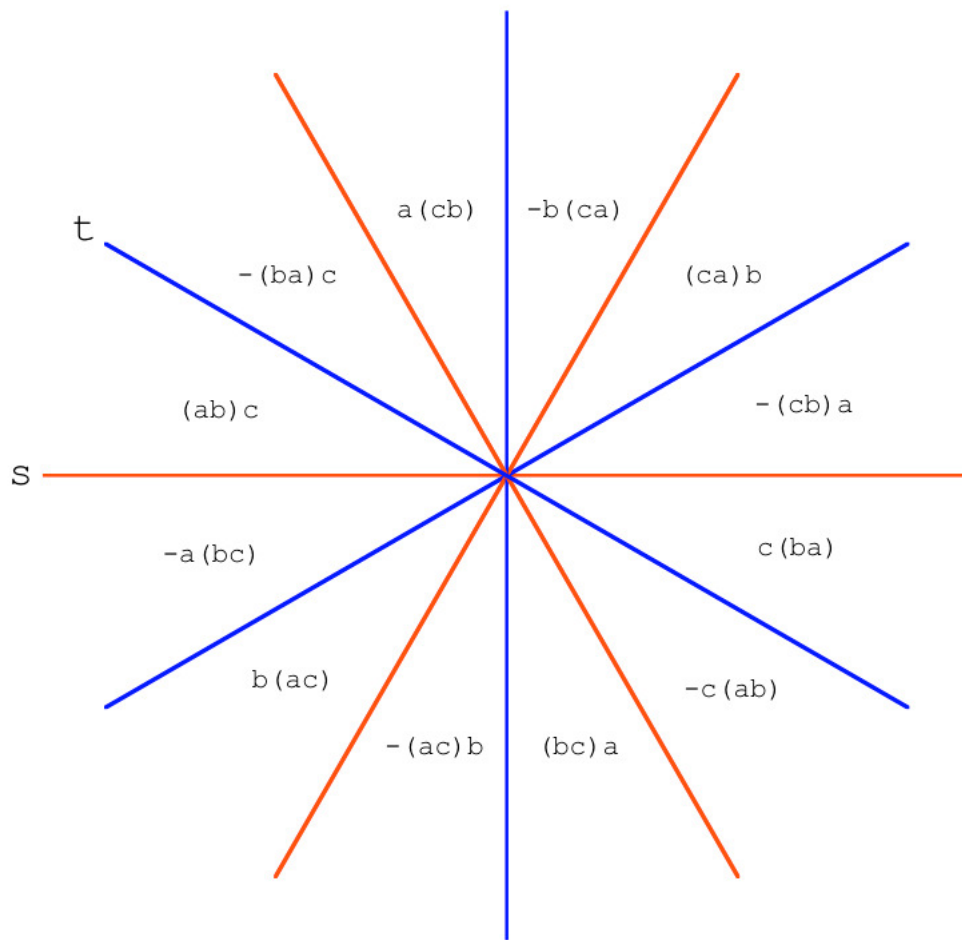
2. Alternativ kann man die Basis eines Oktonions aber auch wie folgt darstellen (Richter 2009, S. 2):

$$B = (1, a, b, ab, c, ac, bc, (ab)c)$$

	a	b	ab	c	ac	bc	(ab)c
a	-1	ab	-b	ac	-c	-(ab)c	bc
b	-ab	-1	a	bc	(ab)c	-c	-ac
ab	b	-a	-1	(ab)c	-bc	ac	-c
c	-ac	-bc	-(ab)c	-1	a	b	ab
ac	c	-(ab)c	bc	-a	-1	-ab	b
bc	(ab)c	c	-ac	-b	ab	-1	-a
(ab)c	-bc	ac	c	-ab	-b	a	-1

Quelle: Richter (2009, S. 4): The Octonion Multiplication Table

Schaut man nun die obige Multiplikationstabelle an, so bemerkt man, dass es offenbar 12 Arten gibt, wie man das Oktonion $(ab)c$ darstellen kann. Man bekommt auf diese Weise die Diedergruppe D_6 der Ordnung 12 und kann die 12 äquivalenten Ausdrücke im folgenden Diagramm darstellen (Richter 2009, S. 5):



Setzen wir für a, b, c die semiotischen Kategorien 1, 2, 3 ein, so bekommen wir also (im Uhrzeigersinn): $-2(31)$, $(31)2$, $-(32)1$, $3(21)$, $-3(12)$, $(23)1$, $-(13)2$, $2(13)$, $-1(23)$, $(12)3$, $-(21)3$, und $1(32)$.

Bibliographie

Richter, David A., The octonions. Paper Western Michigan University (2009),
<http://homepages.wmich.edu/~drichter/octonions.htm>

Toth, Alfred, Eine Möglichkeit, semiotische Oktonionen zu konstruieren. In:
Electronic Journal of Mathematical Semiotics (erscheint, 2009)

31.12.2009