

Gruppentheoretische Semiotik

1. Eine (abgeschlossene) binäre Operation auf einer nichtleeren Menge G ist eine Abbildung $\alpha: G \times G \rightarrow G$. Ein Gruppoid (G, \circ) ist eine nichtleere Menge zusammen mit einer binären Operation. Seien $L(a)$ und $R(a)$ Translationen, so dass $xL(a) = ax$ und $xR(a) = xa$ für alle $x \in G$, d.h. $L(a): G \rightarrow G$ und $R(a): G \rightarrow G$ für jedes $a \in G$, dann verstehen wir unter einer Quasigruppe ein Gruppoid, deren Translationen bijektiv sind für alle $a \in G$. Ein Gruppoid ist kommutativ, wenn $L(a) = R(a)$ für alle $a \in G$, und assoziativ, wenn $R(a \circ b) = R(a)R(b)$ für alle $a, b \in G$. Assoziative Gruppoiden heissen Halbgruppen. Eine Quasigruppe heisst ein Loop, wenn sie ein Einselement hat. Assoziative Loops heissen Gruppen, d.h. Gruppen sind Quasigruppen, welche vermöge ihrer Assoziativität ein Einselement haben. Wegen der Bijektivität von $L(a)$ und $R(a)$ gibt es inverse Abbildungen $L(a)^{-1}$ und $R(a)^{-1}$, mit deren Hilfe wir die folgenden binären Operationen definieren: $x \setminus y = yL(x)^{-1}$ und $x / y = xR(y)^{-1}$ für alle $x, y \in G$. Die Quasigruppen (G, \setminus) und $(G, /)$ nennen wir Konjugierte von (G, \circ) . Wenn wir $F(a, b) = c$ schreiben anstatt $a \circ b = c$, dann erhalten wir: $F(a, b) = c$; $F^{-1}(c, b) = a$; ${}^{-1}F(a, c) = b$; ${}^{-1}(F^{-1})(c, a) = b$; $({}^{-1}F)^{-1}(b, c) = a$; $({}^{-1}(F^{-1}))^{-1}(b, a) = c$. Zu jeder Quasigruppe gibt es genau 6 solcher Parastrophen (Pflugfelder 1990, S. 43).

2. Gegeben sei die Menge $PZ = \{1, 2, 3\}$ der Primzeichen und die Verknüpfung \circ . Da wir eine Tafel herstellen können wie zum Beispiel:

\circ	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

ist (PZ, \circ) eine Quasigruppe. Dann können wir die zugehörigen 6 Parastrophen (π_i) wie folgt darstellen:

$$(\pi_1) = \begin{bmatrix} 123 \\ 123 \end{bmatrix} = F \quad (\pi_2) = \begin{bmatrix} 123 \\ 213 \end{bmatrix} = F^{-1} \quad (\pi_3) = \begin{bmatrix} 123 \\ 132 \end{bmatrix} = {}^{-1}F$$

$$(\pi_4) = \begin{bmatrix} 123 \\ 231 \end{bmatrix} = {}^{-1}(F^{-1}) \quad (\pi_5) = \begin{bmatrix} 123 \\ 312 \end{bmatrix} = {}^{-1}(F) \quad (\pi_6) = \begin{bmatrix} 123 \\ 321 \end{bmatrix} = ({}^{-1}F^{-1})^{-1}$$

Quasigruppen werden in Form von Matrizen mit n^2 Elementen dargestellt (wobei n die Ordnung der Quasigruppe ist), die als Lateinische Quadrate bekannt sind, unter der Bedingung, dass keine zwei gleichen Elemente in derselben Zeile oder Kolonne stehen. Mit Hilfe der 6 Parastrophen erhalten wir dann genau 12 Quasigruppen, die sich in zwei Untergruppen einteilen lassen: in solche mit identischer Nebendiagonale und in solche mit identischer Hauptdiagonale.

3. Semiotische Quasigruppen mit identischer Nebendiagonale

\circ_1		1	2	3
1		2	3	1
2		3	1	2
3		1	2	3

\circ_2		1	2	3
1		3	1	2
2		1	2	3
3		2	3	1

\circ_3		1	2	3
1		1	2	3
2		2	3	1
3		3	1	2

\circ_4		1	2	3
1		3	2	1
2		2	1	3
3		1	3	2

\circ_5		1	2	3
1		1	3	2
2		3	2	1
3		2	1	3

\circ_6		1	2	3
1		2	1	3
2		1	3	2
3		3	2	1

3.1. Gruppen

3.1.1. Die Gruppe (PZ, \circ_1)

1. Abgeschlossenheit: $1 \circ_1 1 = 2$; $1 \circ_1 2 = 2 \circ_1 1 = 3$; $1 \circ_1 3 = 3 \circ_1 1 = 1$; $2 \circ_1 2 = 1$; $2 \circ_1 3 = 3 \circ_1 2 = 2$; $3 \circ_1 3 = 3$.
2. Assoziativität: $1 \circ_1 (2 \circ_1 3) = (1 \circ_1 2) \circ_1 3 = 2$; $2 \circ_1 (3 \circ_1 2) = (2 \circ_1 3) \circ_1 2 = 1$, $3 \circ_1 (3 \circ_1 1) = (3 \circ_1 3) \circ_1 1 = 1$, usw.
3. Einselement: $1 \circ_1 3 = 3 \circ_1 1 = 1$; $2 \circ_1 3 = 3 \circ_1 2 = 2$; $3 \circ_1 3 = 3$, d.h. $e = 3$.
4. Inverses Element: $1^{-1} = 2$, denn $1 \circ_1 2 = 3$; $2^{-1} = 1$, denn $2 \circ_1 1 = 3$; $3^{-1} = 3 = \text{const.}$

Sei $\sigma_1: 1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1$, dann erzeugt σ_1 die folgenden Bedeutungsklassen aus den 10 Peirce-schen Zeichenklassen:

- $\sigma_1 (3.1 2.1 1.1) \rightarrow (3.2 1.2 2.2)$
- $\sigma_1 (3.1 2.1 1.2) \rightarrow (3.2 1.2 2.1)$
- $\sigma_1 (3.1 2.1 1.3) \rightarrow (3.2 1.2 2.3)$
- $\sigma_1 (3.1 2.2 1.2) \rightarrow (3.2 1.1 2.1)$
- $\sigma_1 (3.1 2.2 1.3) \rightarrow (3.2 1.1 2.3)$
- $\sigma_1 (3.1 2.3 1.3) \rightarrow (3.2 1.3 2.3)$
- $\sigma_1 (3.2 2.2 1.2) \rightarrow (3.1 1.1 2.1)$
- $\sigma_1 (3.2 2.2 1.3) \rightarrow (3.1 1.1 2.3)$
- $\sigma_1 (3.2 2.3 1.3) \rightarrow (3.1 1.3 2.3)$
- $\sigma_1 (3.3 2.3 1.3) \rightarrow (3.3 1.3 2.3)$

3.1.2. Die Gruppe (PZ, \circ_2)

(PZ, \circ_2) wurde bereits von Bogarín (1992) als Gruppe nachgewiesen, nachdem Bense kurz darauf hingewiesen hatte, dass “die kleine semiotische Matrix [...] der Cayleyschen Gruppentafel entspricht” (1986, S. 43).

1. Abgeschlossenheit: $1 \circ_2 1 = 3$; $1 \circ_2 2 = 2 \circ_2 1 = 1$; $1 \circ_2 3 = 3 \circ_2 1 = 2$; $2 \circ_2 2 = 2$; $2 \circ_2 3 = 3 \circ_2 2 = 3$; $3 \circ_2 3 = 1$.

2. Assoziativität: $1 \circ_2 (2 \circ_2 3) = (1 \circ_2 2) \circ_2 3 = 2$; $2 \circ_2 (3 \circ_2 2) = (2 \circ_2 3) \circ_2 2 = 3$, $3 \circ_2 (3 \circ_2 1) = (3 \circ_2 3) \circ_2 1 = 3$, usw.
3. Einselement: $1 \circ_2 2 = 2 \circ_2 1 = 1$; $2 \circ_2 2 = 2$; $3 \circ_2 2 = 2 \circ_2 3 = 3$, d.h. $e = 2$.
4. Inverses Element: $1^{-1} = 3$, denn $1 \circ_2 3 = 2$; $2^{-1} = 2 = \text{const.}$, $3^{-1} = 1$, denn $3 \circ_2 1 = 2$.

Sei $\sigma_2: 1 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 1$, dann erzeugt σ_2 die folgenden Bedeutungsklassen aus den 10 Peirce-schen Zeichenklassen:

- $\sigma_2(3.1\ 2.1\ 1.1) \rightarrow (1.3\ 2.3\ 3.3)$
- $\sigma_2(3.1\ 2.1\ 1.2) \rightarrow (1.3\ 2.3\ 3.2)$
- $\sigma_2(3.1\ 2.1\ 1.3) \rightarrow (1.3\ 2.3\ 3.1)$
- $\sigma_2(3.1\ 2.2\ 1.2) \rightarrow (1.3\ 2.2\ 3.2)$
- $\sigma_2(3.1\ 2.2\ 1.3) \rightarrow (1.3\ 2.2\ 3.1)$
- $\sigma_2(3.1\ 2.3\ 1.3) \rightarrow (1.3\ 2.1\ 3.1)$
- $\sigma_2(3.2\ 2.2\ 1.2) \rightarrow (1.2\ 2.2\ 3.2)$
- $\sigma_2(3.2\ 2.2\ 1.3) \rightarrow (1.2\ 2.2\ 3.1)$
- $\sigma_2(3.2\ 2.3\ 1.3) \rightarrow (1.2\ 2.1\ 3.1)$
- $\sigma_2(3.3\ 2.3\ 1.3) \rightarrow (1.1\ 2.1\ 3.1)$

3.1.3. Die Gruppe (PZ, \circ_3)

1. Abgeschlossenheit: $1 \circ_3 1 = 1$; $1 \circ_3 2 = 2 \circ_3 1 = 2$; $1 \circ_3 3 = 3 \circ_3 1 = 3$; $2 \circ_3 2 = 3$; $2 \circ_3 3 = 3 \circ_3 2 = 1$; $3 \circ_3 3 = 2$.
2. Assoziativität: $1 \circ_3 (2 \circ_3 3) = (1 \circ_3 2) \circ_3 3 = 1$; $2 \circ_3 (3 \circ_3 2) = (2 \circ_3 3) \circ_3 2 = 2$, $3 \circ_3 (3 \circ_3 1) = (3 \circ_3 3) \circ_3 1 = 2$, usw.
3. Einselement: $1 \circ_3 1 = 1$; $2 \circ_3 1 = 1 \circ_3 2 = 2$; $3 \circ_3 1 = 1 \circ_3 3 = 3$, d.h. $e = 1$.
4. Inverses Element: $1^{-1} = 1 = \text{const.}$, $2^{-1} = 3$, denn $2 \circ_3 3 = 1$, $3^{-1} = 2$, denn $3 \circ_3 2 = 1$.

Sei $\sigma_3: 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 2$, dann erzeugt σ_3 die folgenden Bedeutungsklassen aus den 10 Peirce-schen Zeichenklassen:

- $\sigma_3(3.1\ 2.1\ 1.1) \rightarrow (2.1\ 3.1\ 1.1)$
- $\sigma_3(3.1\ 2.1\ 1.2) \rightarrow (2.1\ 3.1\ 1.3)$
- $\sigma_3(3.1\ 2.1\ 1.3) \rightarrow (2.1\ 3.1\ 1.2)$
- $\sigma_3(3.1\ 2.2\ 1.2) \rightarrow (2.1\ 3.3\ 1.3)$
- $\sigma_3(3.1\ 2.2\ 1.3) \rightarrow (2.1\ 3.3\ 1.2)$
- $\sigma_3(3.1\ 2.3\ 1.3) \rightarrow (2.1\ 3.2\ 1.2)$
- $\sigma_3(3.2\ 2.2\ 1.2) \rightarrow (2.3\ 3.3\ 1.3)$
- $\sigma_3(3.2\ 2.2\ 1.3) \rightarrow (2.3\ 3.3\ 1.2)$
- $\sigma_3(3.2\ 2.3\ 1.3) \rightarrow (2.3\ 3.2\ 1.2)$
- $\sigma_3(3.3\ 2.3\ 1.3) \rightarrow (2.2\ 3.2\ 1.2)$

Alle drei Gruppen sind offensichtlich kommutativ, d.h. abelsch.

3.2. Kommutative Quasigruppen

3.2.1. Die kommutative Quasigruppe (PZ, \circ_4)

1. Abgeschlossenheit: $1 \circ_4 1 = 3$; $1 \circ_4 2 = 2 \circ_4 1 = 2$; $1 \circ_4 3 = 3 \circ_4 1 = 1$; $2 \circ_4 2 = 1$; $2 \circ_4 3 = 3 \circ_4 2 = 3$; $3 \circ_4 3 = 2$.
2. Die Assoziativitätsbedingung ist i.a. nicht erfüllt: $1 \circ_4 (2 \circ_4 3) = 1 \neq (1 \circ_4 2) \circ_4 3 = 3$; $3 \circ_4 (3 \circ_4 1) = 1 \neq (3 \circ_4 3) \circ_4 1 = 2$, usw.
3. Einselemente: $1 \circ_4 3 = 3 \circ_4 1 = 1$; $2 \circ_4 1 = 1 \circ_4 2 = 2$; $3 \circ_4 2 = 2 \circ_4 3 = 3$.

3.2.2. Die kommutative Quasigruppe (PZ, \circ_5)

1. Abgeschlossenheit: $1 \circ_5 1 = 1$; $1 \circ_5 2 = 2 \circ_5 1 = 3$; $1 \circ_5 3 = 3 \circ_5 1 = 2$; $2 \circ_5 2 = 2$; $2 \circ_5 3 = 3 \circ_5 2 = 1$; $3 \circ_5 3 = 3$.
2. Die Assoziativitätsbedingung ist i.a. nicht erfüllt: $1 \circ_5 (2 \circ_5 3) = 1 \neq (1 \circ_5 2) \circ_5 3 = 3$; $3 \circ_5 (3 \circ_5 1) = 1 \neq (3 \circ_5 3) \circ_5 1 = 2$, usw.
3. Einselemente: $1 \circ_5 1 = 1$; $2 \circ_5 2 = 2$; $3 \circ_5 3 = 3$. (Weil hier jedes Element idempotent ist, ist (PZ, \circ_5) eine Steiner-Quasigruppe; vgl. Lindner und Evans 1977, S. 51 ff.).

3.2.3. Die kommutative Quasigruppe (PZ, \circ_6)

1. Abgeschlossenheit: $1 \circ_6 1 = 2$; $1 \circ_6 2 = 2 \circ_6 1 = 1$; $1 \circ_6 3 = 3 \circ_6 1 = 3$; $2 \circ_6 2 = 3$; $2 \circ_6 3 = 3 \circ_6 2 = 2$; $3 \circ_6 3 = 1$.
2. Die Assoziativitätsbedingung ist i.a. nicht erfüllt: $1 \circ_6 (2 \circ_6 3) = 1 \neq (1 \circ_6 2) \circ_6 3 = 3$; $3 \circ_6 (3 \circ_6 1) = 1 \neq (3 \circ_6 3) \circ_6 1 = 2$, usw.
3. Einselemente: $1 \circ_6 2 = 2 \circ_6 1 = 1$; $2 \circ_6 3 = 3 \circ_6 2 = 2$; $3 \circ_6 1 = 1 \circ_6 3 = 3$.

Die drei Quasigruppen (PZ, \circ_4) , (PZ, \circ_5) und (PZ, \circ_6) bilden also Loops, da sie Einselemente haben, wobei die entsprechenden Links- (a^λ) und Rechtsinversen (a^ρ) jeweils zusammenfallen.

4. Semiotische Quasigruppen mit identischer Hauptdiagonale

\circ_7		1	2	3
1		3	1	2
2		2	3	1
3		1	2	3

\circ_8		1	2	3
1		3	2	1
2		1	3	2
3		2	1	3

\circ_9		1	2	3
1		2	1	3
2		3	2	1
3		1	3	2

\circ_{10}		1	2	3
1		2	3	1
2		1	2	3
3		3	1	2

\circ_{11}		1	2	3
1		1	2	3
2		3	1	2
3		2	3	1

\circ_{12}		1	2	3
1		1	3	2
2		2	1	3
3		3	2	1

4.1. Nichtkommutative Quasigruppen

4.1.1. Die nichtkommutative Quasigruppe (PZ, \circ_7)

1. Abgeschlossenheit: $1 \circ_7 1 = 3$; $1 \circ_7 2 = 1 \neq 2 \circ_7 1 = 2$; $1 \circ_7 3 = 2 \neq 3 \circ_7 1 = 1$; $2 \circ_7 2 = 3$; $2 \circ_7 3 = 1 \neq 3 \circ_7 2 = 2$; $3 \circ_7 3 = 3$.
2. Die Assoziativitätsbedingung ist i.a. nicht erfüllt: $1 \circ_7 (2 \circ_7 3) = 3 \neq (1 \circ_7 2) \circ_7 3 = 2$, usw.
3. Einselemente: $1 \circ_7 2 = 1 \neq 2 \circ_7 1 = 2$; $2 \circ_7 1 = 2 \neq 1 \circ_7 2 = 1$; $3 \circ_7 3 = 3$.

4.1.2. Die nichtkommutative Quasigruppe (PZ, \circ_8)

1. Abgeschlossenheit: $1 \circ_8 1 = 3$; $1 \circ_8 2 = 2 \neq 2 \circ_8 1 = 1$; $1 \circ_8 3 = 1 \neq 3 \circ_8 1 = 2$; $2 \circ_8 2 = 3$; $2 \circ_8 3 = 2 \neq 3 \circ_8 2 = 1$; $3 \circ_8 3 = 3$.
2. Die Assoziativitätsbedingung ist i.a. nicht erfüllt: $1 \circ_8 (3 \circ_8 2) = 3 \neq (1 \circ_8 3) \circ_8 2 = 2$, usw.
3. Einselemente: $1 \circ_8 3 = 1 \neq 3 \circ_8 1 = 2$; $2 \circ_8 3 = 2 \neq 3 \circ_8 2 = 1$; $3 \circ_8 3 = 3$.

4.1.3. Die nichtkommutative Quasigruppe (PZ, \circ_9)

1. Abgeschlossenheit: $1 \circ_9 1 = 2$; $1 \circ_9 2 = 1 \neq 2 \circ_9 1 = 3$; $1 \circ_9 3 = 3 \neq 3 \circ_9 1 = 1$; $2 \circ_9 2 = 2$; $2 \circ_9 3 = 1 \neq 3 \circ_9 2 = 3$; $3 \circ_9 3 = 2$.
2. Die Assoziativitätsbedingung ist i.a. nicht erfüllt: $1 \circ_9 (2 \circ_9 3) = 2 \neq (1 \circ_9 2) \circ_9 3 = 3$, usw.
3. Einselemente: $1 \circ_9 2 = 1 \neq 2 \circ_9 1 = 3$; $2 \circ_9 2 = 2$; $3 \circ_9 2 = 3 \neq 2 \circ_9 3 = 1$.

4.1.4. Die nichtkommutative Quasigruppe (PZ, \circ_{10})

1. Abgeschlossenheit: $1 \circ_{10} 1 = 2$; $1 \circ_{10} 2 = 3 \neq 2 \circ_{10} 1 = 1$; $1 \circ_{10} 3 = 1 \neq 3 \circ_{10} 1 = 3$; $2 \circ_{10} 2 = 2$; $2 \circ_{10} 3 = 3 \neq 3 \circ_{10} 2 = 1$; $3 \circ_{10} 3 = 2$.
2. Die Assoziativitätsbedingung ist i.a. nicht erfüllt: $1 \circ_{10} (2 \circ_{10} 3) = 1 \neq (1 \circ_{10} 2) \circ_{10} 3 = 2$, usw.
3. Einselemente: $1 \circ_{10} 3 = 1 \neq 3 \circ_{10} 1 = 3$; $2 \circ_{10} 2 = 2$; $3 \circ_{10} 1 = 3 \neq 1 \circ_{10} 3 = 1$.

4.1.5. Die nichtkommutative Quasigruppe (PZ, \circ_{11})

1. Abgeschlossenheit: $1 \circ_{11} 1 = 1$; $1 \circ_{11} 2 = 2 \neq 2 \circ_{11} 1 = 3$; $1 \circ_{11} 3 = 3 \neq 3 \circ_{11} 1 = 2$; $2 \circ_{11} 2 = 1$; $2 \circ_{11} 3 = 2 \neq 3 \circ_{11} 2 = 3$; $3 \circ_{11} 3 = 1$.
2. Die Assoziativitätsbedingung ist i.a. nicht erfüllt: $2 \circ_{11} (1 \circ_{11} 3) = 2 \neq (2 \circ_{11} 1) \circ_{11} 3 = 1$, usw.
3. Einselemente: $1 \circ_{11} 1 = 1$; $2 \circ_{11} 3 = 2 \neq 3 \circ_{11} 2 = 3$; $3 \circ_{11} 2 = 3 \neq 2 \circ_{11} 3 = 2$.

4.1.6. Die nichtkommutative Quasigruppe (PZ, \circ_{12})

1. Abgeschlossenheit: $1 \circ_{12} 1 = 1$; $1 \circ_{12} 2 = 3 \neq 2 \circ_{12} 1 = 2$; $1 \circ_{12} 3 = 2 \neq 3 \circ_{12} 1 = 3$; $2 \circ_{12} 2 = 1$; $2 \circ_{12} 3 = 3 \neq 3 \circ_{12} 2 = 2$; $3 \circ_{12} 3 = 1$.
2. Die Assoziativitätsbedingung ist i.a. nicht erfüllt: $1 \circ_{12} (2 \circ_{12} 3) = 2 \neq (1 \circ_{12} 2) \circ_{12} 3 = 1$, usw.

3. Einselemente: $1 \circ_{12} 1 = 1$; $2 \circ_{12} 1 = 2 \neq 1 \circ_{12} 2 = 3$; $3 \circ_{12} 1 = 3 \neq 1 \circ_{12} 3 = 2$.

Bei den sechs Quasigruppen (PZ, \circ_7) bis (PZ, \circ_{12}) gilt also $a^\lambda \neq a^\rho$, d.h. die entsprechenden Links- und Rechtsinversen fallen nicht zusammen.

5.1. Wenn wir die 6 Permutationen der paarweise verschiedenen Elemente von PZ anschauen, dann erzeugen

(1, 2, 3) (2, 1, 3)
 (1, 3, 2) (1, 3, 2)
 (2, 3, 1) (1, 2, 3)

genau die 3 möglichen semiotischen Gruppen (PZ, \circ_1) , (PZ, \circ_2) und (PZ, \circ_3) , wie man leicht nachprüft.

5.2. Wenn wir hingegen die 27 Permutationen von nur je 2 Elementen aus PZ anschauen, dann erzeugen, wie im folgenden gezeigt wird,

(1, 1, 1)	(2, 1, 1)	(3, 1, 1)
(1, 1, 2)	(2, 1, 2)	(3, 1, 2)
(1, 1, 3)	(2, 1, 3)	(3, 1, 3)
(1, 2, 1)	(2, 2, 1)	(3, 2, 1)
(1, 2, 2)	(2, 2, 2)	(3, 2, 2)
(1, 2, 3)	(2, 2, 3)	(3, 2, 3)
(1, 3, 1)	(2, 3, 1)	(3, 3, 1)
(1, 3, 2)	(2, 3, 2)	(3, 3, 2)
(1, 3, 3)	(2, 3, 3)	(3, 3, 3)

genau die 9 möglichen semiotischen Quasigruppen (PZ, \circ_4) bis (PZ, \circ_{12}) .

5.2.1. (1 2 3)
 (1 1 1)

σ_4 (a.b c.d e.f) \rightarrow (1.1 1.1 1.1), d.h. σ_4 transformiert jede Zeichenklasse in die Zeichenrelation (1.1 1.1 1.1).

5.2.2. (1 2 3)
 (1 1 2)

σ_5 (3.1 2.1 1.1) \rightarrow (2.1 1.1 1.1)
 σ_5 (3.1 2.1 1.2) \rightarrow (2.1 1.1 1.1)
 σ_5 (3.1 2.1 1.3) \rightarrow (2.1 1.1 1.2)
 σ_5 (3.1 2.2 1.2) \rightarrow (2.1 1.1 1.1)
 σ_5 (3.1 2.2 1.3) \rightarrow (2.1 1.1 1.2)
 σ_5 (3.1 2.3 1.3) \rightarrow (2.1 1.2 1.2)
 σ_5 (3.2 2.2 1.2) \rightarrow (2.1 1.1 1.1)

$$\sigma_5 (3.2 2.2 1.3) \rightarrow (2.1 1.1 1.2)$$

$$\sigma_5 (3.2 2.3 1.3) \rightarrow (2.1 1.2 1.2)$$

$$\sigma_5 (3.3 2.3 1.3) \rightarrow (2.2 1.2 1.2)$$

5.2.3. (1 2 3)

(1 1 3)

$$\sigma_6 (3.1 2.1 1.1) \rightarrow (3.1 1.1 1.1)$$

$$\sigma_6 (3.1 2.1 1.2) \rightarrow (3.1 1.1 1.1)$$

$$\sigma_6 (3.1 2.1 1.3) \rightarrow (3.1 1.1 1.3)$$

$$\sigma_6 (3.1 2.2 1.2) \rightarrow (3.1 1.1 1.1)$$

$$\sigma_6 (3.1 2.2 1.3) \rightarrow (3.1 1.1 1.3)$$

$$\sigma_6 (3.1 2.3 1.3) \rightarrow (3.1 1.3 1.3)$$

$$\sigma_6 (3.2 2.2 1.2) \rightarrow (3.1 1.1 1.1)$$

$$\sigma_6 (3.2 2.2 1.3) \rightarrow (3.1 1.1 1.3)$$

$$\sigma_6 (3.2 2.3 1.3) \rightarrow (3.1 1.3 1.3)$$

$$\sigma_6 (3.3 2.3 1.3) \rightarrow (3.3 1.3 1.3)$$

5.2.4. (1 2 3)

(1 2 1)

$$\sigma_7 (3.1 2.1 1.1) \rightarrow (1.1 2.1 1.1)$$

$$\sigma_7 (3.1 2.1 1.2) \rightarrow (1.1 2.1 1.2)$$

$$\sigma_7 (3.1 2.1 1.3) \rightarrow (1.1 2.1 1.1)$$

$$\sigma_7 (3.1 2.2 1.2) \rightarrow (1.1 2.2 1.2)$$

$$\sigma_7 (3.1 2.2 1.3) \rightarrow (1.1 2.2 1.1)$$

$$\sigma_7 (3.1 2.3 1.3) \rightarrow (1.1 2.1 1.1)$$

$$\sigma_7 (3.2 2.2 1.2) \rightarrow (1.2 2.2 1.2)$$

$$\sigma_7 (3.2 2.2 1.3) \rightarrow (1.2 2.2 1.1)$$

$$\sigma_7 (3.2 2.3 1.3) \rightarrow (1.2 2.1 1.1)$$

$$\sigma_7 (3.3 2.3 1.3) \rightarrow (1.1 2.1 1.1)$$

5.2.5. (1 2 3)

(1 2 2)

$$\sigma_8 (3.1 2.1 1.1) \rightarrow (2.1 2.1 1.1)$$

$$\sigma_8 (3.1 2.1 1.2) \rightarrow (2.1 2.1 1.2)$$

$$\sigma_8 (3.1 2.1 1.3) \rightarrow (2.1 2.1 1.2)$$

$$\sigma_8 (3.1 2.2 1.2) \rightarrow (2.1 2.2 1.2)$$

$$\sigma_8 (3.1 2.2 1.3) \rightarrow (2.1 2.2 1.2)$$

$$\sigma_8 (3.1 2.3 1.3) \rightarrow (2.1 2.2 1.2)$$

$$\sigma_8 (3.2 2.2 1.2) \rightarrow (2.2 2.2 1.2)$$

$$\sigma_8 (3.2 2.2 1.3) \rightarrow (2.2 2.2 1.2)$$

$$\sigma_8 (3.2 \ 2.3 \ 1.3) \rightarrow (2.2 \ 2.2 \ 1.2)$$

$$\sigma_8 (3.3 \ 2.3 \ 1.3) \rightarrow (2.2 \ 2.2 \ 1.2)$$

$$5.2.6. (1 \ 2 \ 3)$$

$$(1 \ 3 \ 1)$$

$$\sigma_9 (3.1 \ 2.1 \ 1.1) \rightarrow (1.1 \ 3.1 \ 1.1)$$

$$\sigma_9 (3.1 \ 2.1 \ 1.2) \rightarrow (1.1 \ 3.1 \ 1.3)$$

$$\sigma_9 (3.1 \ 2.1 \ 1.3) \rightarrow (1.1 \ 3.1 \ 1.1)$$

$$\sigma_9 (3.1 \ 2.2 \ 1.2) \rightarrow (1.1 \ 3.3 \ 1.3)$$

$$\sigma_9 (3.1 \ 2.2 \ 1.3) \rightarrow (1.1 \ 3.3 \ 1.1)$$

$$\sigma_9 (3.1 \ 2.3 \ 1.3) \rightarrow (1.1 \ 3.1 \ 1.1)$$

$$\sigma_9 (3.2 \ 2.2 \ 1.2) \rightarrow (1.3 \ 3.3 \ 1.3)$$

$$\sigma_9 (3.2 \ 2.2 \ 1.3) \rightarrow (1.3 \ 3.3 \ 1.1)$$

$$\sigma_9 (3.2 \ 2.3 \ 1.3) \rightarrow (1.3 \ 3.1 \ 1.1)$$

$$\sigma_9 (3.3 \ 2.3 \ 1.3) \rightarrow (1.1 \ 3.1 \ 1.1)$$

$$5.2.7. (1 \ 2 \ 3)$$

$$(1 \ 3 \ 3)$$

$$\sigma_{10} (3.1 \ 2.1 \ 1.1) \rightarrow (3.1 \ 3.1 \ 1.1)$$

$$\sigma_{10} (3.1 \ 2.1 \ 1.2) \rightarrow (3.1 \ 3.1 \ 1.3)$$

$$\sigma_{10} (3.1 \ 2.1 \ 1.3) \rightarrow (3.1 \ 3.1 \ 1.3)$$

$$\sigma_{10} (3.1 \ 2.2 \ 1.2) \rightarrow (3.1 \ 3.3 \ 1.3)$$

$$\sigma_{10} (3.1 \ 2.2 \ 1.3) \rightarrow (3.1 \ 3.3 \ 1.3)$$

$$\sigma_{10} (3.1 \ 2.3 \ 1.3) \rightarrow (3.1 \ 3.3 \ 1.3)$$

$$\sigma_{10} (3.2 \ 2.2 \ 1.2) \rightarrow (3.3 \ 3.3 \ 1.3)$$

$$\sigma_{10} (3.2 \ 2.2 \ 1.3) \rightarrow (3.3 \ 3.3 \ 1.3)$$

$$\sigma_{10} (3.2 \ 2.3 \ 1.3) \rightarrow (3.3 \ 3.3 \ 1.3)$$

$$\sigma_{10} (3.3 \ 2.3 \ 1.3) \rightarrow (3.3 \ 3.3 \ 1.3)$$

$$5.2.8. (1 \ 2 \ 3)$$

$$(2 \ 1 \ 1)$$

$$\sigma_{11} (3.1 \ 2.1 \ 1.1) \rightarrow (1.2 \ 1.2 \ 2.2)$$

$$\sigma_{11} (3.1 \ 2.1 \ 1.2) \rightarrow (1.2 \ 1.2 \ 2.1)$$

$$\sigma_{11} (3.1 \ 2.1 \ 1.3) \rightarrow (1.2 \ 1.2 \ 2.1)$$

$$\sigma_{11} (3.1 \ 2.2 \ 1.2) \rightarrow (1.2 \ 1.1 \ 2.1)$$

$$\sigma_{11} (3.1 \ 2.2 \ 1.3) \rightarrow (1.2 \ 1.1 \ 2.1)$$

$$\sigma_{11} (3.1 \ 2.3 \ 1.3) \rightarrow (1.2 \ 1.1 \ 2.1)$$

$$\sigma_{11} (3.2 \ 2.2 \ 1.2) \rightarrow (1.1 \ 1.1 \ 2.1)$$

$$\sigma_{11} (3.2 \ 2.2 \ 1.3) \rightarrow (1.1 \ 1.1 \ 2.1)$$

$$\sigma_{11} (3.2 \ 2.3 \ 1.3) \rightarrow (1.1 \ 1.1 \ 2.1)$$

$$\sigma_{11} (3.3 \ 2.3 \ 1.3) \rightarrow (1.1 \ 1.1 \ 2.1)$$

$$5.2.9. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{12} (3.1 \ 2.1 \ 1.1) \rightarrow (2.2 \ 1.2 \ 2.2)$$

$$\sigma_{12} (3.1 \ 2.1 \ 1.2) \rightarrow (2.2 \ 1.2 \ 2.1)$$

$$\sigma_{12} (3.1 \ 2.1 \ 1.3) \rightarrow (2.2 \ 1.2 \ 2.2)$$

$$\sigma_{12} (3.1 \ 2.2 \ 1.2) \rightarrow (2.2 \ 1.1 \ 2.1)$$

$$\sigma_{12} (3.1 \ 2.2 \ 1.3) \rightarrow (2.2 \ 1.1 \ 2.2)$$

$$\sigma_{12} (3.1 \ 2.3 \ 1.3) \rightarrow (2.2 \ 1.2 \ 2.2)$$

$$\sigma_{12} (3.2 \ 2.2 \ 1.2) \rightarrow (2.1 \ 1.1 \ 2.1)$$

$$\sigma_{12} (3.2 \ 2.2 \ 1.3) \rightarrow (2.1 \ 1.1 \ 2.2)$$

$$\sigma_{12} (3.2 \ 2.3 \ 1.3) \rightarrow (2.1 \ 1.2 \ 2.2)$$

$$\sigma_{12} (3.3 \ 2.3 \ 1.3) \rightarrow (2.2 \ 1.2 \ 2.2)$$

$$5.2.10. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{13} (3.1 \ 2.1 \ 1.1) \rightarrow (1.2 \ 2.2 \ 1.2)$$

$$\sigma_{13} (3.1 \ 2.1 \ 1.2) \rightarrow (1.2 \ 2.2 \ 2.2)$$

$$\sigma_{13} (3.1 \ 2.1 \ 1.3) \rightarrow (1.2 \ 2.2 \ 2.1)$$

$$\sigma_{13} (3.1 \ 2.2 \ 1.2) \rightarrow (1.2 \ 2.2 \ 2.2)$$

$$\sigma_{13} (3.1 \ 2.2 \ 1.3) \rightarrow (1.2 \ 2.2 \ 2.1)$$

$$\sigma_{13} (3.1 \ 2.3 \ 1.3) \rightarrow (1.2 \ 2.1 \ 2.1)$$

$$\sigma_{13} (3.2 \ 2.2 \ 1.2) \rightarrow (1.2 \ 2.2 \ 2.2)$$

$$\sigma_{13} (3.2 \ 2.2 \ 1.3) \rightarrow (1.2 \ 2.2 \ 2.1)$$

$$\sigma_{13} (3.2 \ 2.3 \ 1.3) \rightarrow (1.2 \ 2.1 \ 2.1)$$

$$\sigma_{13} (3.3 \ 2.3 \ 1.3) \rightarrow (1.1 \ 2.3 \ 2.1)$$

$$5.2.11. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{14} (3.1 \ 2.1 \ 1.1) \rightarrow (2.2 \ 2.2 \ 2.2)$$

$$\sigma_{14} (3.1 \ 2.1 \ 1.2) \rightarrow (2.2 \ 2.2 \ 2.2)$$

$$\sigma_{14} (3.1 \ 2.1 \ 1.3) \rightarrow (2.2 \ 2.2 \ 2.2)$$

$$\sigma_{14} (3.1 \ 2.2 \ 1.2) \rightarrow (2.2 \ 2.2 \ 2.2)$$

$$\sigma_{14} (3.1 \ 2.2 \ 1.3) \rightarrow (2.2 \ 2.2 \ 2.2)$$

$$\sigma_{14} (3.1 \ 2.3 \ 1.3) \rightarrow (2.2 \ 2.2 \ 2.2)$$

$$\sigma_{14} (3.2 \ 2.2 \ 1.2) \rightarrow (2.2 \ 2.2 \ 2.2)$$

$$\sigma_{14} (3.2 \ 2.2 \ 1.3) \rightarrow (2.2 \ 2.2 \ 2.2)$$

$$\sigma_{14} (3.2 \ 2.3 \ 1.3) \rightarrow (2.2 \ 2.2 \ 2.2)$$

$$\sigma_{14} (3.3 \ 2.3 \ 1.3) \rightarrow (2.2 \ 2.2 \ 2.2)$$

5.2.12. (1 2 3)
(2 2 3)

σ_{15} (3.1 2.1 1.1) \rightarrow (3.2 2.2 2.2)
 σ_{15} (3.1 2.1 1.2) \rightarrow (3.2 2.2 2.2)
 σ_{15} (3.1 2.1 1.3) \rightarrow (3.2 2.2 2.3)
 σ_{15} (3.1 2.2 1.2) \rightarrow (3.2 2.2 2.2)
 σ_{15} (3.1 2.2 1.3) \rightarrow (3.2 2.2 2.3)
 σ_{15} (3.1 2.3 1.3) \rightarrow (3.2 2.3 2.3)
 σ_{15} (3.2 2.2 1.2) \rightarrow (3.2 2.2 2.2)
 σ_{15} (3.2 2.2 1.3) \rightarrow (3.2 2.2 2.3)
 σ_{15} (3.2 2.3 1.3) \rightarrow (3.2 2.3 2.3)
 σ_{15} (3.3 2.3 1.3) \rightarrow (3.3 2.3 2.3)

5.2.13. (1 2 3)
(2 3 2)

σ_{16} (3.1 2.1 1.1) \rightarrow (2.2 3.2 2.2)
 σ_{16} (3.1 2.1 1.2) \rightarrow (2.2 3.2 2.3)
 σ_{16} (3.1 2.1 1.3) \rightarrow (2.2 3.2 2.2)
 σ_{16} (3.1 2.2 1.2) \rightarrow (2.2 3.3 2.3)
 σ_{16} (3.1 2.2 1.3) \rightarrow (2.2 3.3 2.2)
 σ_{16} (3.1 2.3 1.3) \rightarrow (2.2 3.2 2.2)
 σ_{16} (3.2 2.2 1.2) \rightarrow (2.3 3.3 2.3)
 σ_{16} (3.2 2.2 1.3) \rightarrow (2.3 3.3 2.2)
 σ_{16} (3.2 2.3 1.3) \rightarrow (2.3 3.2 2.2)
 σ_{16} (3.3 2.3 1.3) \rightarrow (2.2 3.2 2.2)

5.2.14. (1 2 3)
(2 3 3)

σ_{17} (3.1 2.1 1.1) \rightarrow (3.2 3.2 2.2)
 σ_{17} (3.1 2.1 1.2) \rightarrow (3.2 3.2 2.3)
 σ_{17} (3.1 2.1 1.3) \rightarrow (3.2 3.2 2.3)
 σ_{17} (3.1 2.2 1.2) \rightarrow (3.2 3.3 2.3)
 σ_{17} (3.1 2.2 1.3) \rightarrow (3.2 3.3 2.3)
 σ_{17} (3.1 2.3 1.3) \rightarrow (3.2 3.3 2.3)
 σ_{17} (3.2 2.2 1.2) \rightarrow (3.3 3.3 2.3)
 σ_{17} (3.2 2.2 1.3) \rightarrow (3.3 3.3 2.3)
 σ_{17} (3.2 2.3 1.3) \rightarrow (3.3 3.3 2.3)
 σ_{17} (3.3 2.3 1.3) \rightarrow (3.3 3.3 2.3)

5.2.15. (1 2 3)
(3 1 1)

$\sigma_{18} (3.1 2.1 1.1) \rightarrow (1.3 1.3 3.3)$
 $\sigma_{18} (3.1 2.1 1.2) \rightarrow (1.3 1.3 3.1)$
 $\sigma_{18} (3.1 2.1 1.3) \rightarrow (1.3 1.3 3.1)$
 $\sigma_{18} (3.1 2.2 1.2) \rightarrow (1.3 1.1 3.1)$
 $\sigma_{18} (3.1 2.2 1.3) \rightarrow (1.3 1.1 3.1)$
 $\sigma_{18} (3.1 2.3 1.3) \rightarrow (1.3 1.3 3.1)$
 $\sigma_{18} (3.2 2.2 1.2) \rightarrow (1.1 1.1 3.1)$
 $\sigma_{18} (3.2 2.2 1.3) \rightarrow (1.1 1.1 3.1)$
 $\sigma_{18} (3.2 2.3 1.3) \rightarrow (1.1 1.1 3.1)$
 $\sigma_{18} (3.3 2.3 1.3) \rightarrow (1.1 1.1 3.1)$

5.2.16. (1 2 3)
(3 1 3)

$\sigma_{19} (3.1 2.1 1.1) \rightarrow (3.3 1.3 3.3)$
 $\sigma_{19} (3.1 2.1 1.2) \rightarrow (3.3 1.3 3.1)$
 $\sigma_{19} (3.1 2.1 1.3) \rightarrow (3.3 1.3 3.3)$
 $\sigma_{19} (3.1 2.2 1.2) \rightarrow (3.3 1.1 3.1)$
 $\sigma_{19} (3.1 2.2 1.3) \rightarrow (3.3 1.1 3.3)$
 $\sigma_{19} (3.1 2.3 1.3) \rightarrow (3.3 1.3 3.3)$
 $\sigma_{19} (3.2 2.2 1.2) \rightarrow (3.2 1.1 3.1)$
 $\sigma_{19} (3.2 2.2 1.3) \rightarrow (3.1 1.1 3.3)$
 $\sigma_{19} (3.2 2.3 1.3) \rightarrow (3.1 1.3 3.3)$
 $\sigma_{19} (3.3 2.3 1.3) \rightarrow (3.3 1.3 3.3)$

5.2.17. (1 2 3)
(3 2 2)

$\sigma_{20} (3.1 2.1 1.1) \rightarrow (2.3 2.3 3.3)$
 $\sigma_{20} (3.1 2.1 1.2) \rightarrow (2.3 2.3 3.2)$
 $\sigma_{20} (3.1 2.1 1.3) \rightarrow (2.3 2.3 3.2)$
 $\sigma_{20} (3.1 2.2 1.2) \rightarrow (2.3 2.2 3.2)$
 $\sigma_{20} (3.1 2.2 1.3) \rightarrow (2.3 2.2 3.2)$
 $\sigma_{20} (3.1 2.3 1.3) \rightarrow (2.3 2.2 3.2)$
 $\sigma_{20} (3.2 2.2 1.2) \rightarrow (2.2 2.2 3.2)$
 $\sigma_{20} (3.2 2.2 1.3) \rightarrow (2.2 2.2 3.2)$
 $\sigma_{20} (3.2 2.3 1.3) \rightarrow (2.2 2.2 3.2)$
 $\sigma_{20} (3.3 2.3 1.3) \rightarrow (2.2 2.2 3.2)$

5.2.18. (1 2 3)
(3 2 3)

$\sigma_{21}(3.1\ 2.1\ 1.1) \rightarrow (3.3\ 2.3\ 3.3)$
 $\sigma_{21}(3.1\ 2.1\ 1.2) \rightarrow (3.3\ 2.3\ 3.2)$
 $\sigma_{21}(3.1\ 2.1\ 1.3) \rightarrow (3.3\ 2.3\ 3.3)$
 $\sigma_{21}(3.1\ 2.2\ 1.2) \rightarrow (3.3\ 2.2\ 3.2)$
 $\sigma_{21}(3.1\ 2.2\ 1.3) \rightarrow (3.3\ 2.2\ 3.3)$
 $\sigma_{21}(3.1\ 2.3\ 1.3) \rightarrow (3.3\ 2.3\ 3.3)$
 $\sigma_{21}(3.2\ 2.2\ 1.2) \rightarrow (3.2\ 2.2\ 3.2)$
 $\sigma_{21}(3.2\ 2.2\ 1.3) \rightarrow (3.2\ 2.2\ 3.3)$
 $\sigma_{21}(3.2\ 2.3\ 1.3) \rightarrow (3.2\ 2.3\ 3.3)$
 $\sigma_{21}(3.3\ 2.3\ 1.3) \rightarrow (3.3\ 2.3\ 3.3)$

5.2.19. (1 2 3)
(3 3 1)

$\sigma_{22}(3.1\ 2.1\ 1.1) \rightarrow (1.3\ 3.3\ 3.3)$
 $\sigma_{22}(3.1\ 2.1\ 1.2) \rightarrow (1.3\ 3.3\ 3.3)$
 $\sigma_{22}(3.1\ 2.1\ 1.3) \rightarrow (1.3\ 3.3\ 3.1)$
 $\sigma_{22}(3.1\ 2.2\ 1.2) \rightarrow (1.3\ 3.3\ 3.3)$
 $\sigma_{22}(3.1\ 2.2\ 1.3) \rightarrow (1.3\ 3.3\ 3.1)$
 $\sigma_{22}(3.1\ 2.3\ 1.3) \rightarrow (1.3\ 3.1\ 3.1)$
 $\sigma_{22}(3.2\ 2.2\ 1.2) \rightarrow (1.3\ 3.3\ 3.3)$
 $\sigma_{22}(3.2\ 2.2\ 1.3) \rightarrow (1.3\ 3.3\ 3.1)$
 $\sigma_{22}(3.2\ 2.3\ 1.3) \rightarrow (1.3\ 3.1\ 3.1)$
 $\sigma_{22}(3.3\ 2.3\ 1.3) \rightarrow (1.1\ 3.1\ 3.1)$

5.2.20. (1 2 3)
(3 3 2)

$\sigma_{23}(3.1\ 2.1\ 1.1) \rightarrow (2.3\ 3.3\ 3.3)$
 $\sigma_{23}(3.1\ 2.1\ 1.2) \rightarrow (2.3\ 3.3\ 3.3)$
 $\sigma_{23}(3.1\ 2.1\ 1.3) \rightarrow (2.3\ 3.3\ 3.2)$
 $\sigma_{23}(3.1\ 2.2\ 1.2) \rightarrow (2.3\ 3.3\ 3.3)$
 $\sigma_{23}(3.1\ 2.2\ 1.3) \rightarrow (2.3\ 3.3\ 3.2)$
 $\sigma_{23}(3.1\ 2.3\ 1.3) \rightarrow (2.3\ 3.2\ 3.2)$
 $\sigma_{23}(3.2\ 2.2\ 1.2) \rightarrow (2.3\ 3.3\ 3.3)$
 $\sigma_{23}(3.2\ 2.2\ 1.3) \rightarrow (2.3\ 3.3\ 3.2)$
 $\sigma_{23}(3.2\ 2.3\ 1.3) \rightarrow (2.3\ 3.2\ 3.2)$
 $\sigma_{23}(3.3\ 2.3\ 1.3) \rightarrow (2.2\ 3.2\ 3.2)$

5.2.21. (1 2 3)
(3 3 3)

- σ_{24} (3.1 2.1 1.1) \rightarrow (3.3 2.3 1.3)
- σ_{24} (3.1 2.1 1.2) \rightarrow (3.3 2.3 1.3)
- σ_{24} (3.1 2.1 1.3) \rightarrow (3.3 2.3 1.3)
- σ_{24} (3.1 2.2 1.2) \rightarrow (3.3 2.3 1.3)
- σ_{24} (3.1 2.2 1.3) \rightarrow (3.3 2.3 1.3)
- σ_{24} (3.1 2.3 1.3) \rightarrow (3.3 2.3 1.3)
- σ_{24} (3.2 2.2 1.2) \rightarrow (3.3 2.3 1.3)
- σ_{24} (3.2 2.2 1.3) \rightarrow (3.3 2.3 1.3)
- σ_{24} (3.2 2.3 1.3) \rightarrow (3.3 2.3 1.3)
- σ_{24} (3.3 2.3 1.3) \rightarrow (3.3 2.3 1.3)

6. Semiotische Loops

Wie wir gezeigt haben, bilden die semiotischen Quasigruppen (PZ, \circ_1) , (PZ, \circ_2) und (PZ, \circ_3) abelsche Gruppen, die Quasigruppen (PZ, \circ_4) , (PZ, \circ_5) und (PZ, \circ_6) Loops, während (PZ, \circ_1) bis (PZ, \circ_{12}) "gewöhnliche" Quasigruppen sind. Da alle abelschen Gruppen ebenfalls Loops sind, prüfen wir im folgenden, ob sie auch Moufang-Loops sind, d.h. ob sie die drei Moufang-Identitäten (vgl. z.B. Goodaire, May und Raman 1999) erfüllen:

- $((x \circ y)x)z = x(y(x \circ z))$ linke Moufang-Identität
- $((x \circ y)z)y = x(y(z \circ y))$ rechte Moufang-Identität
- $(x \circ y)(z \circ x) = (x(y \circ z))x$ mittlere Moufang-Identität

Wenn wir $x = 1$, $y = 2$ und $z = 3$ setzen, erhalten wir für (PZ, \circ_1) , (PZ, \circ_2) und (PZ, \circ_3) :
 $((1 \circ 2)1)3 = 1 = 1(2(1 \circ 3))$; $((1 \circ 2)3)2 = 2 = 1(2(3 \circ 2))$; $(1 \circ 2)(3 \circ 1) = 1 = (1(2 \circ 3))1$.

Erfüllt ein Loop ausserdem die Bedingungen

- $(x(y \circ x))z = x(y(x \circ z))$ linke Bol-Identität
- $((x \circ y)z)y = x((y \circ z)y)$ rechte Bol-Identität,

so heisst er Bolscher Loop (Pflugfelder 1990, S. 112). Wir setzen wieder $x = 1$, $y = 2$ und $z = 3$ und erhalten für (PZ, \circ_1) , (PZ, \circ_2) und (PZ, \circ_3) : $(1(2 \circ 1))3 = 1 = 1(2(1 \circ 3))$; $((1 \circ 2)3)2 = 2 = 1((2 \circ 3)2)$.

Ein Bolscher Loop (B, \circ) , der 1. $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$ erfüllt und 2. für den gilt $x \rightarrow x \circ x$ ist eine Bijektion, heisst Bruckscher Loop (Pflugfelder 1990, S. 120). Hierzu brauchen wir nur 1. zu zeigen: Wir setzen wieder $x = 1$, $y = 2$ und $z = 3$ und erhalten für (PZ, \circ_1) , (PZ, \circ_2) und (PZ, \circ_3) : $(1 \circ 2)^{-1} = 1^{-1} \circ 2^{-1} = 3$; $(1 \circ 3)^{-1} = 1^{-1} \circ 3^{-1} = 2$; $(2 \circ 3)^{-1} = 2^{-1} \circ 3^{-1} = 1$.

Semiotische Gruppen sind also zugleich Moufangsch, Bolsch und Brucksch.

Ferner können wir feststellen, dass die kommutativen Quasigruppen (PZ, \circ_4) , (PZ, \circ_5) und (PZ, \circ_6) totalsymmetrisch sind, da sie die Bedingungen 1. $x \circ y = y \circ x$ und 2. $x(x \circ y) = y$ erfüllen. Da 1. klar ist, zeigen wir 2.: Für (PZ, \circ_4) bis (PZ, \circ_6) bekommen wir dann: $1(1 \circ 2) = 2$, $2(2 \circ 3) = 3$, $3(3 \circ 2) = 2$, $3(3 \circ 1) = 1$, usw. Es handelt sich bei den kommutativen Quasigruppen also um Steiner-Loops (Pflugfelder 1990, S. 123).

7. Quasigruppentheoretische Konstruktionen

Die für die mathematische Semiotik wichtige Frage, ob es möglich sei, mittels kommutativer oder sogar nichtkommutativer Quasigruppen, also mit Loops, welche nicht Moufangsch sind, oder sogar mit Nicht-Loop-Gebilden, ebenfalls Zeichenklassen und Realitätsthematiken zu konstruieren, musste in Toth (2007, S. 46) offen bleiben. Immerhin konnte festgehalten werden, dass alle semiotischen Quasigruppen, welche nicht Gruppen sind, nicht-assoziativ sind, ferner gibt es natürlich kommutative und nichtkommutative Quasigruppen, was also an die entsprechenden Verhältnisse in den Zahlbereichen erinnert:

Zahlbereiche	strukturelle Eigenschaften		Gruppoid
R, C	kommutativ	assoziativ	(abelsche) Gruppen
H	nichtkommutativ	assoziativ	?
O	nichtkommutativ	nichtassoziativ	nichtkommutative Quasigruppen
?	kommutativ	nichtassoziativ	kommutative Quasigruppen

So entsprechen also die Moufang-Loops qua Gruppen den Körpern der reellen und der komplexen Zahlen. Eine gruppentheoretische Korrespondenz der Quaternionen könnten die nicht-abelschen Gruppen sein. Mit den Oktonionen korrespondieren die nichtkommutativen Quasigruppen, die keine Loops darstellen. Doch welcher Zahlbereich entspricht den kommutativen Quasigruppen (Loops)?

Obwohl diese Zusammenhänge weiter offen bleiben müssen, hat die vorliegende Studie folgende Zusammenhänge ergeben, die wir in Form von drei semiotischen Theoremen festhalten wollen:

Theorem 1: Die symplerotischen quasigruppentheoretischen Operationen $\sigma_4 - \sigma_{12}$ erzeugen die semiotischen Sinnklassen, d.h. die Menge der 473 semiotischen Relationen, bei denen weder die semiotische inklusive Ordnung noch die paarweise Verschiedenheit der Relata gefordert wird.

Theorem 2: Die symplerotischen gruppentheoretischen Operationen $\sigma_1 - \sigma_3$ erzeugen die semiotischen Bedeutungsklassen, d.h. die Menge der 27 semiotischen Relationen, bei denen die paarweise Verschiedenheit der Relata, nicht aber die semiotische inklusive Ordnung gefordert wird.

Theorem 3: Die symplerotische gruppentheoretische Operation σ_2 erzeugt die 10 Zeichenklassen, bei denen sowohl die paarweise Verschiedenheit der Relata als auch die semiotische inklusive Ordnung gefordert wird.

Bibliographie

- Bense, Max, Repräsentation und Fundierung der Realitäten. Baden-Baden 1986
- Bogarin, Jorge, Symplerosis. Über komplementäre Zeichen und Realitäten. In: Semiosis 65-68, 1992, S. 87-94
- Goodaire, Edgar G./May, Sean/Raman, Maitreyi, The Moufang Loops of Order Less Than 64. New York 1999
- Lindner, Charles C./Evans, Trevor, Finite Embedding Theorems for Partial Desings and Algebras. Québec 1977
- Pflugfelder, Hala O., Quasigroups and Loops. Berlin 1990
- Toth, Alfred, Grundlegung einer mathematischen Semiotik. Klagenfurt 2007 (2. Aufl. 2008)

© Prof. Dr. A. Toth, 10.1.2009