

Homotope Semiotik

1. Definitionen der Homotopie

Seien X und Y topologische Räume und f, g stetige Funktionen von X in Y . Dann bedeutet, daß f **homotop** ist zu g , daß es eine stetige Abbildung $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ gibt vom Produkt-Raum $X \times [0, 1]$ in Y , so daß für alle $x \in X$ gilt: $H(x, 0) = f(x)$ und $H(x, 1) = g(x)$. Die Funktion H heißt **Homotopie** zwischen f und g . Unformaler ausgedrückt, ist H also eine **stetige Deformierung** von $f(x)$ in $g(x)$ (Croom 1978. S. 44).

Eine alternative Definition lautet: Zwei Abbildungen $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ heißen **homotop**, wenn es eine **intermediäre Familie** stetiger Abbildungen $f_t: X \rightarrow Y$ für $0 \leq t \leq 1$ gibt, welche bezüglich t stetig variieren (Kosniowski 1980, s. 110 ff.)

Eine ausführlichere Definition lautet: Es seien X, Y topologische Räume, $A \subset X$ und $f_0, f_1 \in C(X, Y)$. f_0, f_1 heißen **homotop modulo A** (in Zeichen: $f_0 \simeq f_1 \pmod{A}$), wenn es eine **Homotopie** $H: X \times I \rightarrow Y$ stetig gibt mit $H(\cdot, 0) = f_0$ und $H(\cdot, 1) = f_1$ konstant für alle $a \in A$.

Eine **Homotopie** von X nach Y ist eine stetige Abbildung $H: X \times I \rightarrow Y$. Für jedes $x \in X$ heißt $H(x, \cdot): I \rightarrow Y$ der **Deformationsweg** von $H(x, 0)$ bzgl. H . Die "Zwischenabbildungen" $H(\cdot, t): X \rightarrow Y$ werden häufig mit h_t oder H_t bezeichnet, man hat dafür keinen besonderen Namen. (Man könnte sie etwa die **Deformate** von f_0 nennen, aber das ist nicht üblich.) Statt $f_0 \simeq f_1 \pmod{\emptyset}$ schreibt man $f_0 \simeq f_1$ und sagt, f_0 und f_1 seien homotop.

Eine Homotopie $H: X \times I \rightarrow Y$ heißt **Isotopie** und H_0, H_1 dann isotop, wenn die "Deformate" H_t für jedes $t \in I$ topologische Einbettungen sind, d.h. Homöomorphismen auf Unterräumen von Y . (Führer 1977, S. 161).

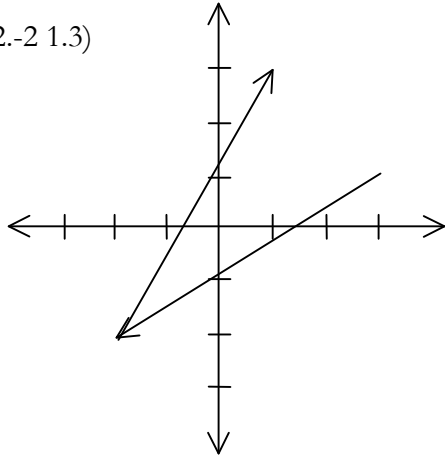
In der folgenden Darstellung, welche die in Toth (2007, S. 52 ff.) eingeführte komplexe Semiotik voraussetzt, behandeln wir semiotische Transgressionen, lineare Transformationen, semiotische Transoperatoren und semiotische Belegungswechseloperatoren. Für H setzen wir (Trans-)ZKL als Menge der (Trans-)Zkln bzw. (Trans-)RTH als Menge der (Trans-)Rthn), wobei die stetigen Deformationen durch die genannten Transformationen und Operatoren ausgeführt werden.

2. Semiotische Transgressionen

Während die Zkln, die in 1 Kontextur liegen, natürlich keine Kontexturübergänge haben, weisen die Trans-Zkln mindestens je einen Kontexturübergang (semiotische Transgression) auf. Da die Trans-Zkln als Funktionsgraphen in ein Koordinatensystem gezeichnet werden können, lassen sich die Transgressionen berechnen, indem man die Schnittpunkte der Graphen der Trans-Zkln mit Abszisse und/oder Ordinate bestimmt.

Beispiel: Man möchte die Orte der semiotischen Transgression(en) der in 2 Kontexturen liegen Trans-Zkl (3.1 -2.-2 1.3) wissen:

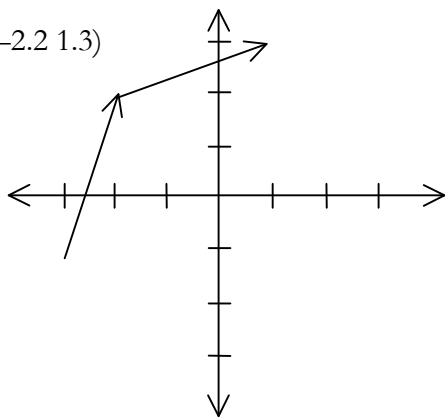
(3.1 -2.-2 1.3)



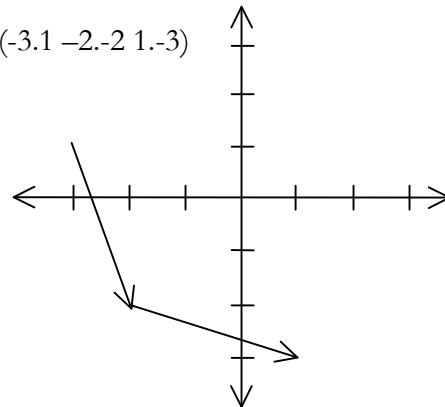
Mit elementarer Mathematik bekommen wir, daß der erste Teilgraph die semiotisch-idealistische Kontexturgrenze im Punkt $(1 \frac{1}{3} | 0)$ und die idealistisch-meontische Kontexturgrenze im Punkt $(0 | -0.8)$, der zweite Teilgraph die meontisch-materialistische Kontexturgrenze im Punkt $(-0.8 | 0)$ und die materialistisch-semiotische Kontexturgrenze im Punkt $(0 | 1 \frac{1}{3})$ überschreitet. Aus den Werten der Transgressionen ersieht man ferner, daß der Funktionsgraph dieser Trans-Zkl, einer Trans-Zkl mit Rückkehr in die Ausgangsstruktur, zur Winkelhalbierenden $y = x$ symmetrisch ist.

Praktisch wäre es nun, wenn entweder aus den Orten der Transgressionen auf die Pfadlängen oder aus den Pfadlängen auf die Orte der Transgressionen geschlossen werden könnte. Am liebsten hätten wir freilich eine Isomorphie zwischen Orten und Längen. Leider gibt es aber weder das eine noch das andere. Betrachten wir hierzu als Beispiel die Trans-Zkln $(-3.-1 -2.2 1.3)$ und $(-3.1 -2.-2 1.-3)$:

$(-3.-1 -2.2 1.3)$

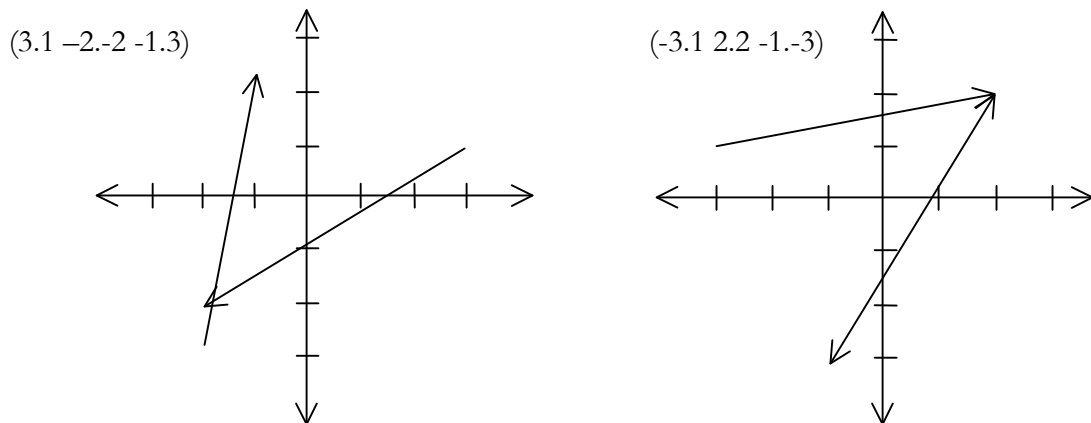


$(-3.1 -2.-2 1.-3)$



Die Transgressionswerte betragen für $(-3.-1 -2.2 1.3)$ $x = -2 \frac{2}{3}$ und $y = 2 \frac{2}{3}$, während die Transgressionswerte für $(-3.1 -2.-2 1.-3)$ bei $x = -2 \frac{2}{3}$ und $y = -2 \frac{2}{3}$ liegen. Beide Trans-Zkln haben die Pfadlängen $\sqrt{10} + \sqrt{10}$. Die Abbildung der Orte auf die Pfadlängen ist somit wegen der verschiedenen Vorzeichen der Ordinatenwerte nicht eindeutig, weshalb wir von den Orten nicht auf die Längen schließen können. Umgekehrt können wir aber offen-

sichtlich auch nicht von den Längen auf die Orte schließen. Man könnte sich nun damit behelfen, daß man statt von den tatsächlichen Transgressionswerten von den absoluten ausgeht. In diesem Fall wird uns natürlich nur die Abbildung der Orte auf die Längen, nicht aber diejenige der Längen auf die Orte interessieren, denn wir wollen ja nicht nur die absoluten Transgressionswerte haben, sondern auch wissen, zwischen welchen Kontexturen die Transgression stattfindet. Leider hat aber auch diese scheinbare Lösung einen Haken: Falls nämlich, anders als in unserem obigen Beispiel, die beiden Teilgraphen einer Trans-Zkl verschiedene Pfadlängen haben, ist es bei der Abbildung der absoluten Werte von Transgressionen auf Pfadlängen nicht möglich, zu entscheiden, ob eine Pfadlänge dem 1. oder dem 2. Teilgraph zukommt. Um dies zu illustrieren, betrachten wir die Trans-Zkln (3.1 -2.-2 -1.3) und (-3.1 2.2 -1.-3):

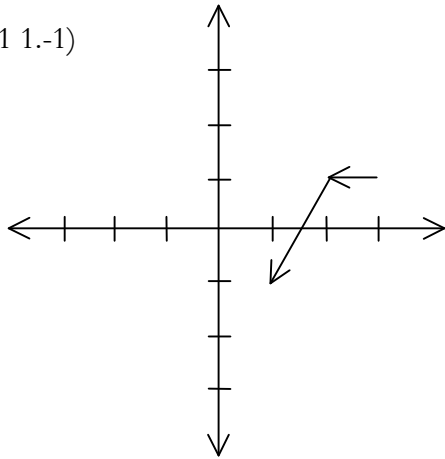


Die Transgressionswerte sind für (3.1 -2.-2 -1.3) $x = \langle 1 \frac{1}{3}, -1.6 \rangle$ und $y = -0.8$, für (-3.1 2.2 -1.-3) $y = \langle 1.6, -1 \frac{1}{3} \rangle$ und $x = 0.8$. Die Pfadlängen sind für (3.1 -2.-2 -1.3) $\sqrt{34} + \sqrt{26}$ und für (-3.1 2.2 -1.-3) $\sqrt{26} + \sqrt{34}$. Bei verschiedenen Pfadlängen von Teilgraphen spielen also, wie man sofort erkennt, nicht nur die Vorzeichen der Transgressionswerte eine Rolle, sondern auch, ob es sich um Abszissen- oder Ordinatenwerte handelt, was äquivalent damit ist, ob die Werte dem 1. oder dem 2. Teilgraphen zukommen. Wollen wir also sowohl die Orte der semiotischen Transgressionen als auch die Längen der Pfade zwischen den Kontexturen bestimmen, bleibt uns nichts anderes übrig, als entweder beide Werte separat zu berechnen, oder aber, falls man aus den absoluten Transgressionswerten auf die Pfadlängen schließen will, die Graphen der entsprechenden Trans-Zkln zu Hilfe zu nehmen.

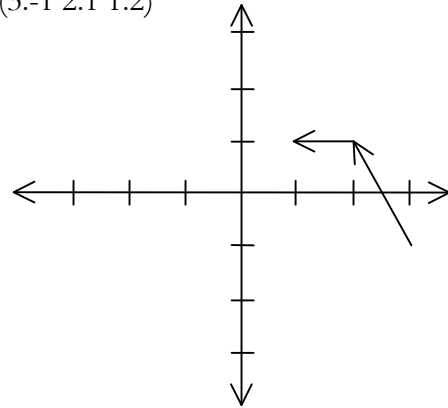
3. Lineare Transformationen

Trotz nichteindeutiger Abbildung zwischen den Orten semiotischer Transgressionen und den Längen der Pfade zwischen den Kontexturen und umgekehrt besteht ein enges Verhältnis zwischen beiden. Tatsächlich ist es immer so, daß je zwei Graphen, die entweder gleiche Transgressionsorte oder gleiche Pfadlängen haben, durch die elementaren linearen Transformationen Spiegelung, Drehung und Streckung bzw. Kontraktion aufeinander abgebildet werden können. Betrachten wir die Graphen der Trans-Zkln (3.1 2.1 1.-1), (3.-1 2.1 1.2), (3.1 2.-1 1.-1) und (3.-1 2.-1 1.1):

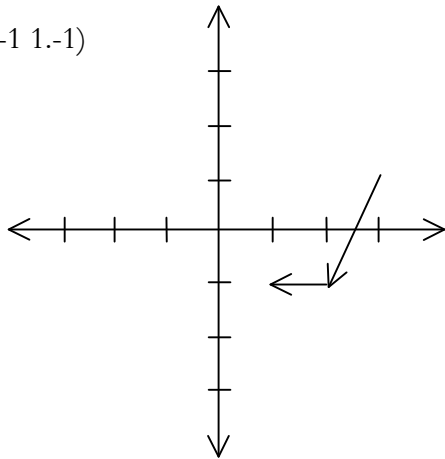
(3.1 2.1 1.-1)



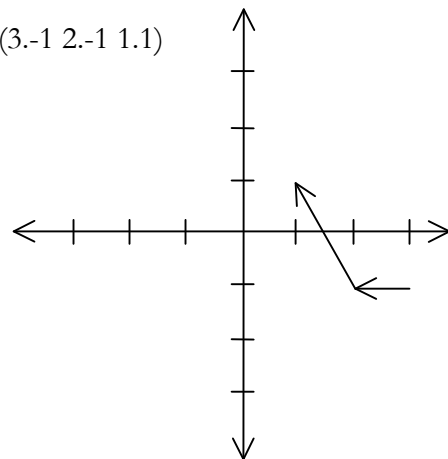
(3.-1 2.1 1.2)



(3.1 2.-1 1.-1)

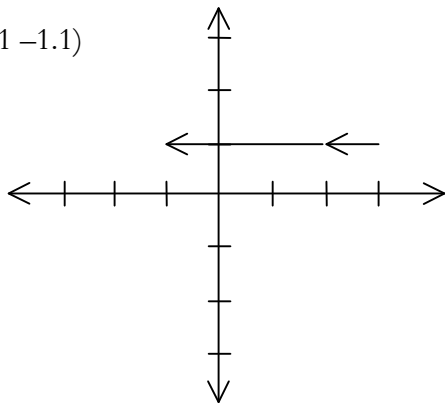


(3.-1 2.-1 1.1)

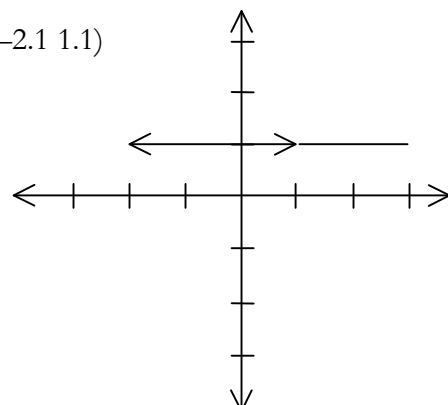


Man erkennt leicht, daß alle vier Graphen durch Spiegelung und Drehung aufeinander abbildbar sind. Ein Beispiel für Streckung/Kontraktion finden wir bei den Trans-Zkln (3.1 2.1 -1.1) und (3.1 -2.1 1.1):

(3.1 2.1 -1.1)



(3.1 -2.1 1.1)



Geht man vom Graphen von (3.1 2.1 -1.1) aus, so erscheint der Teilgraph (3.1 2.1) im Graphen von (3.1 -2.1 1.1) gestreckt, geht man vom Graphen von (3.1 -2.1 1.1) aus, so wird (3.1 -2.1) zu (3.1 2.1) kontrahiert, während in beiden Richtungen der Teilgraph (2.1 -1.1)

konstant auf $(-2.1 \ 1.1)$ abgebildet wird. Hier liegt übrigens ein Beispiel für semiotische Isotopie durch semiotisch-topologische Einbettung von Zeichenrumpfen in Zkln vor.

Nun wollen wir uns auf Spiegelung und Drehung beschränken, da die Abbildungsbeziehung gespiegelter und gedrehter (Trans-)Zkln in der Regel sowohl von der numerischen wie von der graphischen Notation her schwieriger erkennbar ist als diejenige gestreckter bzw. kontrahierter.

Jeder Punkt $z \in \mathbf{C}$ kann in der Form $(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ geschrieben werden. $r := |z|$ ist die Entfernung von z zum Nullpunkt, φ ist der Winkel zwischen der positiven Abszisse und dem Ortsvektor von z : $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi}$. Die Zahlen $1, -1, i, -i$ haben dann die Polarkoordinatendarstellung $1 = 1(\cos 0 + i \sin 0)$; $-1 = 1(\cos \pi + i \sin \pi)$, $i = 1(\cos \frac{1}{2}\pi + i \sin \frac{1}{2}\pi)$, $-i = 1(\cos \frac{3}{2}\pi + i \sin \frac{3}{2}\pi)$, d.h. es gilt $e^{i2\pi} = 1$, $e^{i\pi} = -1$, $e^{i\frac{1}{2}\pi} = i$, $e^{i\frac{3}{2}\pi} = -i$.

Eine lineare Transformation ist eine Abbildung eines Vektorraums V auf einen Vektorraum W . Jede lineare Transformation kann durch eine Matrix dargestellt werden. Gegeben seien zwei Punkte (x_1, x_2)

und die Transformationsmatrix $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$. Mit den Regeln der Matrixmultiplikation folgt:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix}. \text{ Besondere Fälle sind:}$$

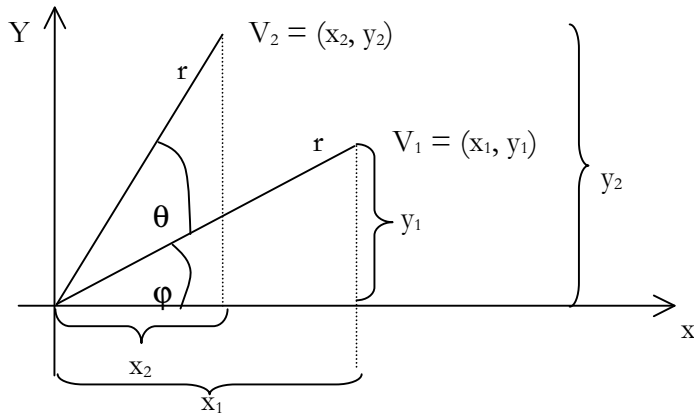
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad Ax = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix}$$

$$\bullet A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad Ax = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad Ax = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

$$\bullet A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad Ax = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Wie man sieht, ist $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ die Transformationsmatrix für die Drehung. Nehmen wir nun an, T_θ bezeichne die Drehung eines Vektors $v = (x, y)$ im \mathbf{R}^2 im Gegenuhrzeigersinn:



Sei $v_2 = T(v_1)$. Aus dem Diagramm ersehen wir, daß $|T_\theta v| = |v|$, d.h. eine Drehung verändert den Betrag eines Vektors nicht. Ferner sehen wir, daß $x_1 = r \cos \varphi$ und $y_1 = r \sin \varphi$ sowie $x_2 = r \cos (\theta + \varphi)$ und $y_2 = r \sin (\theta + \varphi)$. Mit den Sinus- und Cosinus-Regeln erhalten wir somit: $x_2 = r \cos \theta \cos \varphi - r \sin \theta \sin \varphi = x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta$ und $y_2 = r \cos \theta \sin \varphi + r \sin \theta \cos \varphi = x_1 \sin \theta + y_1 \cos \varphi$. Wir haben somit: $T_\theta(x_1, y_1) = \langle x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta, x_1 \sin \theta + y_1 \cos \varphi \rangle$.

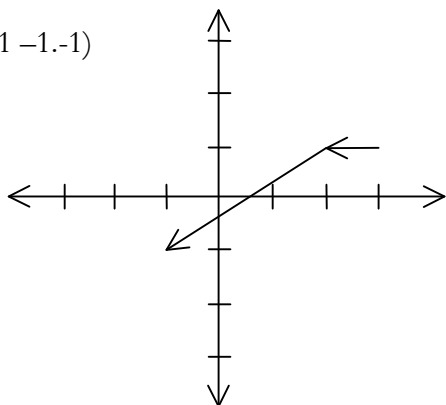
Wir wollen uns nun auch die inverse Transformation anschauen, wobei wir jetzt die Matrizendarstellung benutzen. Gegeben seien die beiden Basisvektoren im \mathbf{R}^2 , d.h. $B = T\langle 0, 1 \rangle = \langle \cos \theta + \frac{1}{2}\pi, \sin \theta + \frac{1}{2}\pi \rangle$. Da $\cos (\theta + \frac{1}{2}\pi) = \sin \theta$ und $\sin (\theta + \frac{1}{2}\pi) = \cos \theta$, ist $T\langle 0, 1 \rangle = \langle -\sin \theta, \cos \theta \rangle$. Damit haben wir

$T\langle x, y \rangle = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Die inverse Transformation ist somit eine Drehung im Uhrzeigersinn um den Winkel θ oder eine Drehung im Gegenuhrzeigersinn um den Winkel $-\theta$. Die dazugehörige

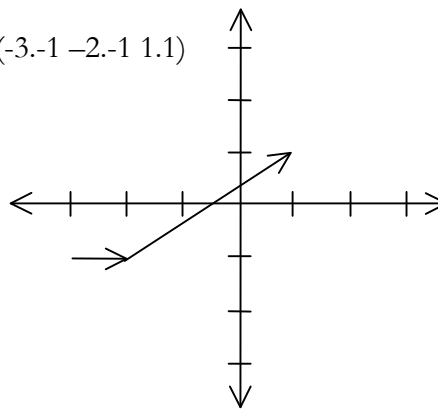
Matrix ist $\begin{bmatrix} \cos -\theta & -\sin -\theta \\ \sin -\theta & \cos -\theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Damit besitzen wir nun das mathematische Rüstzeug, um (Trans-)Zkln durch Drehung aufeinander abzubilden. Als Beispiel stehe die Abbildung der Trans-Zkl (3.1 2.1 -1.-1) auf die Trans-Zkl (-3.-1 -2.-1 1.1), d.h. eine Drehung um 180° im Gegenuhrzeigersinn. Die zugehörigen Graphen sind:

(3.1 2.1 -1.-1)



(-3.-1 -2.-1 1.1)



Wir zerlegen die Drehung der Trans-Zkln in die Drehung der 3 Subzeichen: $T_\theta(3.1) = (3.-1)$, $T_\theta(2.1) = (-2.-1)$, $T_\theta(-1.-1) = (1.1)$ und erinnern uns, daß die allgemeine Transformationsformel für Drehungen lautet: $T_\theta(x_1, y_1) = \langle x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta, x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta \rangle$. Da $\theta = 180^\circ$, ist $\sin 180^\circ = 0$ und $\cos 180^\circ = -1$. Damit erhalten wir: $T_{180^\circ}(3.1) = \langle 3 \cdot -1 - 1 \cdot 0, 3 \cdot 0 + 1 \cdot -1 \rangle = (-3.-1)$, $T_{180^\circ}(2.1) = \langle 2 \cdot -1 - 1 \cdot 0, 2 \cdot 0 + 1 \cdot -1 \rangle = (-2.-1)$, $T_{180^\circ}(-1.-1) = \langle -1 \cdot -1 - 1 \cdot 0, -1 \cdot 0 + -1 \cdot -1 \rangle = (1.1)$. Es ist also $T_{180^\circ}(3.1 2.1 -1.-1) = (-3.-1 -2.-1 1.1)$. Wegen $\sin 180^\circ = 0$ und $\cos 180^\circ = -1$, bekommen wir folgende Transfor-

mationsmatrix: $T(x, y) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, und dies ist genau die Transformationsmatrix, die einen Vektor

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ in einen Vektor $\begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix}$, semiotisch also ein Subzeichen der semiotischen Kontextur in ein Subzeichen der meontischen Kontextur bzw. umgekehrt überführt.

4. Semiotische Transoperatoren

4.1. Einfache Kontexturübergänge

Zwischen den vier semiotischen Kontexturen sind allgemein 6 Übergänge zu unterscheiden:

- | | | | |
|-------------------|-----------------|-------------------------|--------------|
| I → II: Semiotik | → Materialismus | II → III: Materialismus | → Meontik |
| III → IV: Meontik | → Idealismus | IV → I: Idealismus | → Semiotik |
| I → III: Semiotik | → Meontik | II → IV: Materialismus | → Idealismus |

Es ist nun möglich, mit Hilfe eines semiotischen Transoperators T gemäß diesen Übergängen semiotisch-materialistische, materialistisch-meontische, meontisch-idealistische, idealistisch-semiotische, semiotisch-meontische und materialistisch-idealistische Trans-Zkln zu konstruieren. Im folgenden Schema bezeichnet $(\pm X.\pm Y)$ mit $X \in \{1, 2, 3\}$ und $Y \in \{.1, .2, .3\}$ die je Kontextur verschiedene Primzeichenstruktur (Triaden und Trichotomien) und $K(n)$ mit $n \in \{I, II, III, IV\}$ jeweils eine Kontextur:

- | | |
|--|---|
| <p>1. $K(I) \rightarrow K(II)$
 $(X.Y) \rightarrow (-X.Y) =: T_1$
 Beispiel: $T_1(3.1 \ 2.1 \ 1.1) = (-3.1 \ -2.1 \ -1.1)$
 $1.-1)$</p> | <p>2. $K(II) \rightarrow K(III)$
 $(-X.Y) \rightarrow (-X.-Y) =: T_2$
 Beispiel: $T_2(-3.1 \ -2.1 \ -1.1) = (-3.-1 \ -2.-1 \ -1.-1)$</p> |
| <p>3. $K(III) \rightarrow K(IV)$
 $(-X.-Y) \rightarrow (X.-Y) =: T_3$
 Beispiel: $T_3(-3.-1 \ -2.-1 \ -1.-1) = (3.-1 \ 2.-1 \ 1.-1)$
 $1.1)$</p> | <p>4. $K(IV) \rightarrow K(I)$
 $(X.-Y) \rightarrow (X.Y) =: T_4$
 Beispiel: $T_4(3.-1 \ 2.-1 \ 1.-1) = (3.1 \ 2.1 \ 1.1)$</p> |
| <p>5. $K(I) \rightarrow K(III)$
 $(X.Y) \rightarrow (-X.-Y) =: T_5$
 Beispiel: $T_5(3.1 \ 2.1 \ 1.1) = (-3.-1 \ -2.-1 \ -1.-1)$
 $1.-1)$</p> | <p>6. $K(II) \rightarrow K(IV)$
 $(-X.Y) \rightarrow (X.-Y) =: T_6$
 Beispiel: $T_6(-3.1 \ -2.1 \ -1.1) = (3.-1 \ 2.1 \ 1.-1)$</p> |

Hinzu kommen die inversen Transoperatoren:

7. $K(II) \rightarrow K(I)$
 $(-X.Y) \rightarrow (X.Y) =: T'_1$
 Beispiel: $T'_1(-3.1 \ -2.1 \ -1.1) = (3.1 \ 2.1 \ 1.1)$, usw.

Die hier eingeführten semiotischen Transoperatoren eignen sich nun zwar zur Formalisierung der oben aufgelisteten 6 Kontexturübergänge, wo es sich durchwegs um triadisch und trichotom homogene Trans-Zkln und Trans-Rthn handelt; T_1, \dots, T_6 formalisieren somit nur einfache Kontexturübergänge. Ungeeignet sind sie daher für triadisch inhomogene Trans-Zkln wie $-3.1 \ 2.1 \ -1.1$, für trichotom inhomogene wie $3.1 \ 2.-1 \ 1.-1$ sowie für triadisch und trichotom inhomogene wie $-3.1 \ -2.-2 \ 1.3$.

4.2. Doppelte Kontexturübergänge

Um auch mehrfache Kontexturübergänge zu formalisieren, muß der Transoperator T_i redefiniert werden. Hierzu führen wir zunächst eine strukturelle Notation von Zkln und Rthn ein. Anstelle der thetischen Einführung eines Zeichens gehen wir von der folgenden Leerpattern-Struktur aus:

Zeichen := $(\emptyset\emptyset\emptyset\emptyset\emptyset\emptyset\emptyset\emptyset\emptyset\emptyset\emptyset\emptyset\emptyset\emptyset\emptyset\emptyset\emptyset\emptyset)$

Sie besteht aus 18 Leerstellen-Markern \emptyset , in die Primzeichen eingeschrieben werden können, wobei wir uns die Leerstellen-Marker als in 9 Paare zusammengefaßt denken. Jedes Paar soll einem Subzeichen der kleinen semiotischen Matrix zugeordnet werden. Die Ordnung sei retrosemiosisch: 3.3, 3.2, 3.1; 2.3, 2.2, 2.1; 1.3, 1.2, 1.1. Zunächst benötigen wir Belegungsoperatoren B_1, \dots, B_{18} , welche die gewünschten Stellenbelegungen der Leerpattern-Struktur vornehmen. Als Beispiel stehe die Erzeugung der Zkl $(3.1 \ 2.2 \ 1.3)$:

$B_{5,6,9,10,13,14}(\emptyset\emptyset\emptyset\emptyset\emptyset\emptyset\emptyset\emptyset\emptyset\emptyset\emptyset\emptyset\emptyset\emptyset\emptyset\emptyset\emptyset\emptyset) = (\emptyset\emptyset\emptyset\emptyset\blacksquare\blacksquare\emptyset\emptyset\blacksquare\blacksquare\emptyset\emptyset\blacksquare\blacksquare\emptyset\emptyset\emptyset\emptyset) = (3.1 \ 2.2 \ 1.3)$

Wir verabreden ferner aus Gründen der Vereinfachung, daß Belegungsoperatoren immer semiotische Zkln und Rthn, also solche der Kontextur $K(I)$, erzeugen sollen. Wollen wir hingegen Trans-Zkln und Trans-Rthn erzeugen, so genügt es, auf die durch die Belegungsoperatoren erzeugten Zkln und Rthn die entsprechenden Transoperatoren T_1, \dots, T_{18} anzuwenden. Zu diesem Zweck führen wir für positive Besetzung eines Primzeichens \blacksquare und für negative, d.h. Nicht-Besetzung, \square ein. Die Transoperatoren kehren \blacksquare in \square und \square in \blacksquare um, ferner gilt $T_i(\blacksquare_i) = \square_i$ und $T_i(\square_i) = \blacksquare_i$; sie fungieren also genauso wie der zweiwertige logische Negator:

$$T_{5,9,13}(\emptyset\emptyset\emptyset\emptyset\blacksquare\blacksquare\emptyset\emptyset\blacksquare\blacksquare\emptyset\emptyset\blacksquare\blacksquare\emptyset\emptyset\emptyset\emptyset) = (\emptyset\emptyset\emptyset\emptyset\square\square\emptyset\emptyset\square\square\emptyset\emptyset\square\square\emptyset\emptyset\emptyset\emptyset) = (-3.1 - 2.2 -1.3)$$

$$T_{5,6,9,10,13,14}(\emptyset\emptyset\emptyset\emptyset\blacksquare\blacksquare\emptyset\emptyset\blacksquare\blacksquare\emptyset\emptyset\blacksquare\blacksquare\emptyset\emptyset\emptyset\emptyset) = (\emptyset\emptyset\emptyset\emptyset\square\square\emptyset\emptyset\square\square\emptyset\emptyset\square\square\emptyset\emptyset\emptyset\emptyset) = (-3.- 1 -2.-2 -1.-3)$$

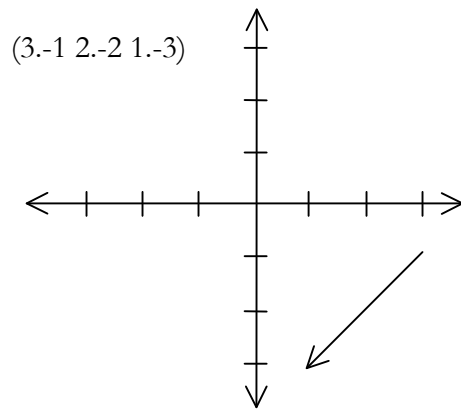
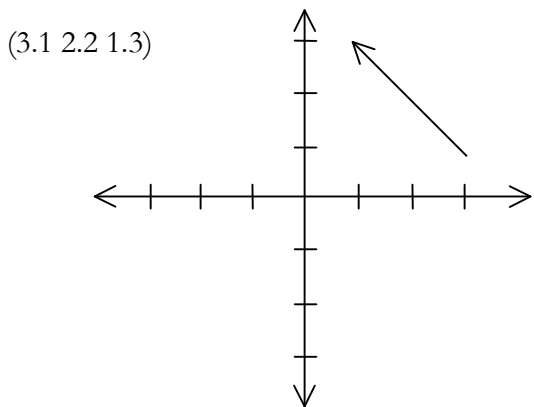
$$T_{6,10,14}(\emptyset\emptyset\emptyset\emptyset\blacksquare\blacksquare\emptyset\emptyset\blacksquare\blacksquare\emptyset\emptyset\blacksquare\blacksquare\emptyset\emptyset\emptyset\emptyset) = (\emptyset\emptyset\emptyset\emptyset\square\square\emptyset\emptyset\square\square\emptyset\emptyset\square\square\emptyset\emptyset\emptyset\emptyset) = (3.-1 2.- 2 1.-3)$$

Wir hatten weiter oben festgestellt, daß jede der 4 Kontexturen 10 Dualsysteme enthält, allerdings nur, falls sie sowohl triadisch als auch trichotom homogen sind. Wenn wir nun triadisch und trichotom inhomogene Trans-Zkln und Trans-Rthn konstruieren wollen, so erhöht sich die Zahl natürlich beträchtlich. Wir haben dann für jede der 4 Kontexturen eine Leerpattern-Struktur mit 6 besetzten Stellen, von denen jede positiv oder negativ sein kann. Das ergibt $4 \cdot 2^6 = 256$ mögliche Dualsysteme in den 4 Kontexturen. Im Hinblick auf Kontexturübergänge erübrigt es sich jedoch, alle 256 (Trans-)Zkln und (Trans-)Rthn gesondert zu untersuchen, da ein Zeichen wegen seiner triadischen Struktur maximal in 3 Kontexturen liegen kann und sich die 256 Dualsysteme somit in solche mit einfachem und in solche mit doppeltem Kontexturübergang einteilen lassen. Dabei gilt offenbar folgendes

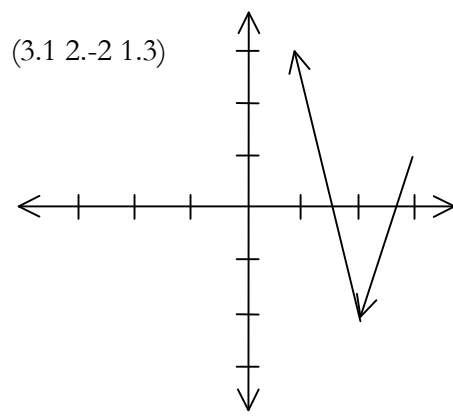
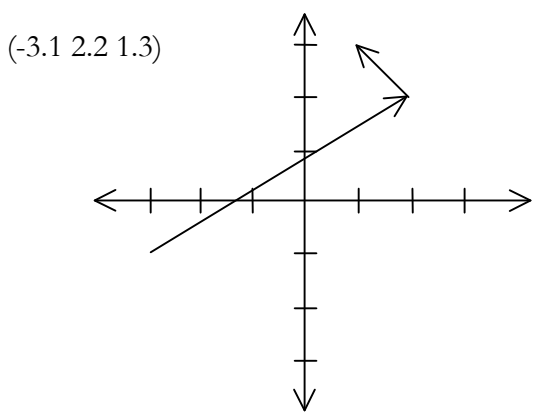
Theorem: Homogene (Trans-)Zkln und (Trans-)Rthn liegen in 1, triadisch oder trichotom inhomogene in 2 und triadisch und trichotom inhomogene in 3 Kontexturen.

1. 1 Kontextur, kein Kontexturübergang, triadisch und trichotom homogen:
(3.1 2.2 1.3), (-3.1 -2.2 -1.3), (-3.-1 -2.-2 -1.-3), (3.-1 2.-2 1.-3)
- 2.1. 2 Kontexturen, 1 Kontexturübergang, triadisch inhomogen:
(-3.1 2.2 1.3, 3.1 -2.2 1.3, 3.1 2.2 -1.3), ...
- 2.2. 2 Kontexturen, 1 Kontexturübergang, trichotom inhomogen:
(3.-1 2.2 1.3), (3.1 2.-2 1.3), (3.1 2.2 1.-3), ...
3. 3 Kontexturen, 2 Kontexturübergänge, triadisch und trichotom inhomogen:
(-3.1 2.-2 1.3), (3.-1 -2.2 1.3), (3.1 2.-2 -1.3), ...

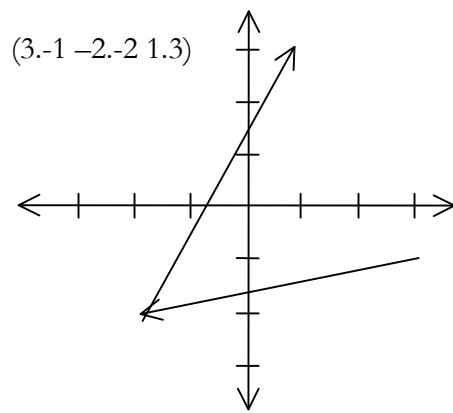
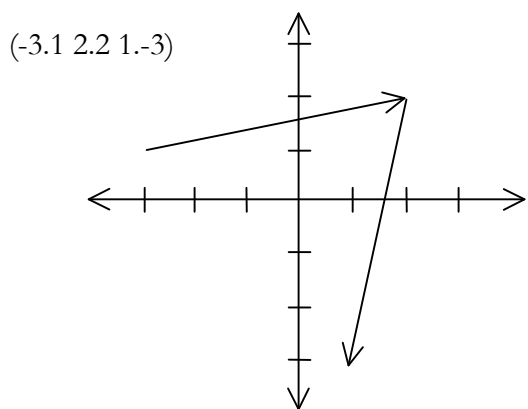
In 1 Kontextur liegen beispielsweise die triadisch und trichotom homogene Zkl (3.1 2.2 1.3) und die Trans-Zkl (3.-1 2.-2 1.-3):



In 2 Kontexturen liegen etwa die triadisch inhomogene Trans-Zkl (-3.1 2.2 1.3) und trichotom inhomogene Trans-Zkl (3.1 2.-2 1.3):



In 3 Kontexturen liegen zum Beispiel die triadisch und trichotom inhomogenen Trans-Zkln (-3.1 2.2 1.-3) und (3.-1 -2.-2 1.3):



Wenn wir nun anstatt von Leerpatterns von belegten Strukturen in numerischer Notation ausgehen, können wir die Anzahl der Transoperatoren auf 9 beschränken: T_1, \dots, T_9 . Dabei gelten folgende Theoreme:

Theorem 1: Von 1 in 2 Kontexturen führen Transoperatoren mit nur geraden oder nur ungeraden Indizes, wobei höchstens 2 Transoperatoren angewandt werden können, damit nicht alle 3 Subzeichen wieder in der gleichen Kontextur liegen:

$$\begin{aligned} T_1(3.1 \ 2.2 \ 1.3) &= (-3.1 \ 2.2 \ 1.3) & T_2(3.1 \ 2.2 \ 1.3) &= (3.-1 \ 2.2 \ 1.3) \\ T_{1,3}(3.1 \ 2.2 \ 1.3) &= (-3.1 \ -2.2 \ 1.3) & T_{2,4}(3.1 \ 2.2 \ 1.3) &= (3.-1 \ 2.-2 \ 1.3); \end{aligned}$$

vgl. aber:

$$T_{1,3,5}(3.1 \ 2.2 \ 1.3) = (-3.1 \ -2.2 \ -1.3) \quad T_{2,4,6}(3.1 \ 2.2 \ 1.3) = (3.-1 \ 2.-2 \ 1.-3)$$

Theorem 2: Von 1 in 3 Kontexturen führen Transoperatoren mit sowohl geraden als auch ungeraden Indizes:

$$T_{4,5}(3.1 \ 2.2 \ 1.3) = (3.1 \ 2.-2 \ -1.3) \quad T_{1,2,4}(3.1 \ 2.2 \ 1.3) = (-3.-1 \ 2.-2 \ 1.3)$$

Theorem 2 gilt jedoch **nicht**, wenn durch Transoperatoren der triadische oder der trichotome Wert von mindestens 2 Subzeichen je das gleiche Vorzeichen erhält:

$$T_{1,2}(3.1 \ 2.2 \ 1.3) = (-3.-1 \ 2.2 \ 1.3) \quad T_{2,3,5}(3.1 \ 2.2 \ 1.3) = (3.-1 \ -2.2 \ -1.3), \text{ usw.}$$

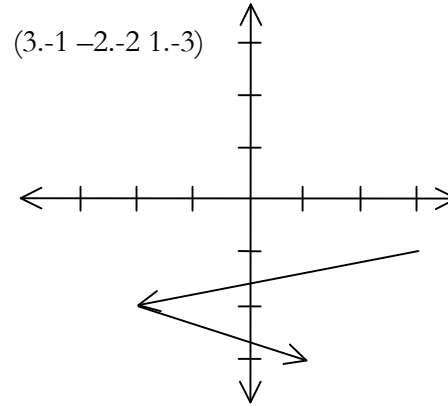
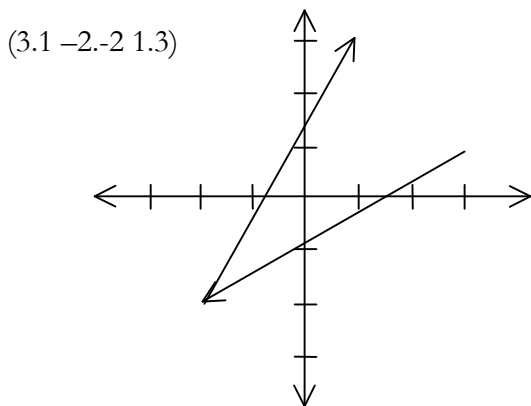
Von 2 in 3 Kontexturen führen kontextuierte Transoperatoren. Betrachten wir die folgenden Beispiele:

$T_1(3.1 \ 2.-2 \ 1.3) = (-3.1 \ 2.-2 \ 1.3)$	2→3 Kontexturen
$T_3(3.1 \ 2.-2 \ 1.3) = (3.1 \ -2.-2 \ 1.3)$	2→3 Kontexturen, mit Rückkehr
$T_5(3.1 \ 2.-2 \ 1.3) = (3.1 \ 2.-2 \ -1.3)$	2→3 Kontexturen
$T_{1,3}(3.1 \ 2.-2 \ 1.3) = (-3.1 \ -2.-2 \ 1.3)$	2→3 Kontexturen
$T_{1,3,5}(3.1 \ 2.-2 \ 1.3) = (-3.1 \ -2.-2 \ -1.3)$	2→3 Kontexturen, mit Rückkehr
$T_2(3.1 \ -2.2 \ 1.3) = (3.-1 \ -2.2 \ 1.3)$	2→3 Kontexturen
$T_4(3.1 \ -2.2 \ 1.3) = (3.1 \ -2.-2 \ 1.3)$	2→3 Kontexturen, mit Rückkehr
$T_6(3.1 \ -2.2 \ 1.3) = (3.1 \ -2.2 \ 1.-3)$	2→3 Kontexturen
$T_{2,4}(3.1 \ -2.2 \ 1.3) = (3.-1 \ -2.-2 \ 1.3)$	2→3 Kontexturen
$T_{2,4,6}(3.1 \ -2.2 \ 1.3) = (3.-1 \ -2.-2 \ 1.-3)$	2→3 Kontexturen, mit Rückkehr

Theorem 3a: Man gelangt also von 3 in 2 Kontexturen, indem man für den Transoperator einen ungeraden Index wählt, falls der Belegungsindex des negativen Primzeichens der Ausgangs-Trans-Zkl positiv ist, und umgekehrt.

Theorem 3b: Der Vermerk “mit Rückkehr” soll besagen, daß Anfangs- und Endpunkt des Graphen einer Trans-Zkl in derselben Kontextur liegen. Die 3 Kontexturen sind hier also nicht verschieden. Dies ist wiederum dann der Fall, wenn durch Transoperatoren der triadische oder der trichotome Wert von mindestens 2 Subzeichen je das gleiche Vorzeichen erhalten.

Theorem 3b illustrieren die beiden folgenden Graphen der Trans-Zkln $(3.1 \ -2.-2 \ 1.3)$ und $(3.-1 \ -2.-2 \ 1.-3)$:



Entsprechende kontextuierte Übergänge sind auch bei den inversen Übergängen von 3 in 2, von 2 in 1 und von 3 in 1 Kontextur erforderlichlich.

5. Pfade durch die semiotischen Kontexturen

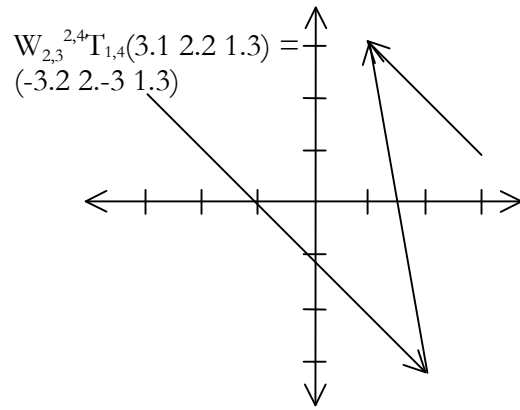
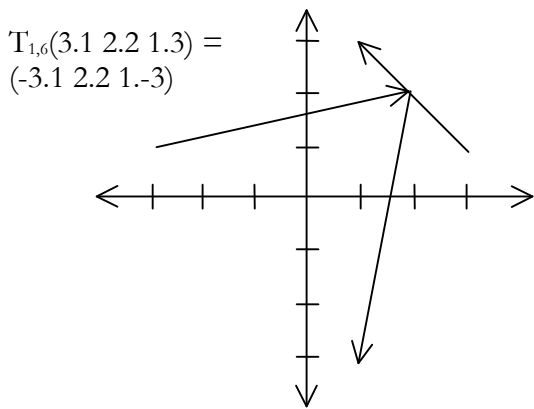
Sowohl lineare Transformationen als auch semiotische Transoperatoren bewirken nur lineare stetige Deformationen von Zkln bzw. Rthn zwischen den 4 semiotischen Kontexturen, wobei als Funktionen in beiden Methoden semiotische Transoperatoren fungieren. Doch können mit Hilfe von Belegungs- und Transoperatoren allein die homotopen Möglichkeiten der Semiotik nicht ausgeschöpft werden. So können wir bislang nur Kontexturübergänge der Form $(3.1 \ 2.2 \ 1.3) \rightarrow (-3.1 \ 2.-2 \ 1.3)$, nicht aber solche der Form $(3.1 \ 2.2 \ 1.3) \rightarrow (-3.2 \ 2.-3 \ 1.3)$ erzeugen. Um auch Fälle wie die letzteren zuzulassen, führen wir als dritten Operator den Belegungswechseloperator W_h^i ein. Dieser ersetzt die Belegung an der Stelle i durch den Wert h .

Beispiel für Belegungswechseloperator allein: $W_{2,3^{2,4}}(3.1 \ 2.2 \ 1.3) = (3.2 \ 2.3 \ 1.3)$.

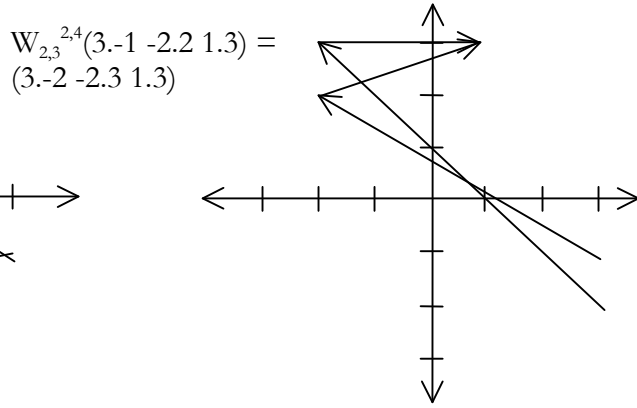
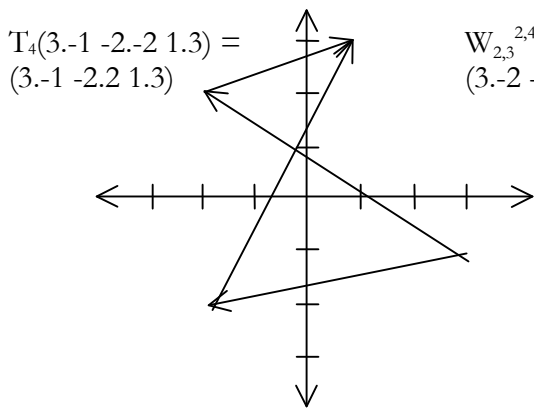
Beispiel für Trans- und Belegungswechseloperator: $W_{2,3^{2,4}}\Gamma_{1,4}(3.1 \ 2.2 \ 1.3) = (-3.2 \ 2.-3 \ 1.3)$.

Wir können nun die Pfade durch die semiotischen Kontexturen dadurch visualisieren, daß wir sowohl die Ausgangs-Zkln bzw. -Rthn als auch die durch Transoperatoren erzeugten Ziel-Zkln bzw. -Rthn im selben Graphen darstellen. Nach der Einführung des Belegungswechseloperators können damit sämtliche möglichen Fälle von Kombinationen von 2 oder mehr (Trans-)Zkln bzw. (Trans-)Rthn dargestellt und sämtliche möglichen Kontexturübergänge exakt berechnet werden.

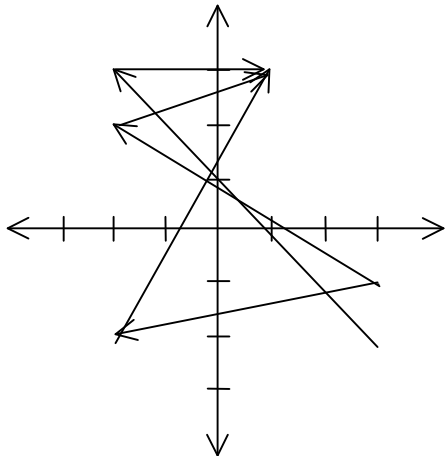
Bei den folgenden vier Graphen sind die beiden auf der linken Seite Beispiele für konstante Belegung (d.h. $W_h^i = \text{const.}$), während bei denjenigen rechts Belegungswechsel stattfindet. Die beiden folgenden Graphen haben je einen Schnittpunkt zwischen Ausgangs- und Ziel-Zkl gemeinsam:



Von den nächsten beiden Graphen hat derjenige links 2, derjenige rechts 3 Schnittpunkte zwischen Ausgangs- und Ziel-Zkl gemeinsam:



Ein Beispiel für Schnittpunkte und Kontexturübergänge zwischen 3 Trans-Zkln erhält man, wenn man die beiden obigen Graphen zusammenlegt. Der unten stehende Graph enthält dann 7 Schnittpunkte und 9 Kontexturübergänge, nämlich 3 von jeder Trans-Zkl:



Unsere Erkenntnisse stehen daher im Einklang mit Gotthard Günthers Feststellung: “Das neue Thema der Philosophie ist die Theorie der Kontexturalgrenzen, die die Wirklichkeit durchschneiden” (Günther [1]: 47); vgl. auch Toth (2001).

Literatur

- Croom, Fred H., Basic Concepts of Algebraic Topology. New York 1978
Führer, Lutz, Allgemeine Topologie mit Anwendungen. Braunschweig 1977
Günther, Gotthard, Dieser Substanzverlust des Menschen. Hrsg. von Rudolf Kaehr. In:
<http://www.techno.net/pkl/substanz.htm> (57 S.) (= Günther [1]).
Kosniowski, Czes, A First Course in Algebraic Topology. Cambridge U.K. 1980
Toth, Alfred: Skizze einer transzendentalen Semiotik. In: Bernard, Jeff und Gloria Withalm
(Hrsg.), Myths, Rites, Simulacra. Symposium of the Austrian Association for Semiotics.
Vol. I. Vienna 2001, S. 117-134
Toth, Alfred, Grundlegung einer mathematischen Semiotik. Klagenfurt 2007

©2008, Prof. Dr. Alfred Toth