

Prof. Dr. Alfred Toth

Kategorielle Verschachtelung in der erweiterten Semiotik

1. Wie in Toth (2009) gezeigt wurde, kann man auf der Basis der von Bense (1975, S. 100 ff.) eingeführten semiotischen Grossen Matrix auf zwei prinzipiell verschiedene Arten Zeichenklassen aus Paaren von dyadischen Subzeichen bilden:

$$1. \text{Zkl}^{\text{erw}} = ((3.a \ 3.b) \ (2.c \ 2.d) \ (1.e \ 1.f))$$

$$2. \text{Zkl}^{\text{erw}} = ((3.a \ b.c) \ (2.d \ e.f) \ (1.g \ h.i)) \text{ mit } a, \dots, \in \{1, 2, 3\}$$

Bei der ersten Variante gehören als innerhalb jedes Bezugs die sekundären (determinierenden) Subzeichen der gleichen triadischen Relation an wie die primären (determinierten) Subzeichen. Bei der zweiten Variante sind nur die Bezüge der primären Zeichen bestimmt. Bei der ersten Variante kann man weiter entscheiden, ob man die semiotische Inklusionsordnung für einfache, d.h. nicht-erweiterte triadische Zeichenklassen

$$\text{Zkl} = (3.a \ 2.b \ 1.c) \text{ mit } a \leq b \leq c$$

auch auf die zu konstruierenden erweiterten Zeichenklassen überträgt. Tut man es, so erhält man, wie in Toth (2009) gezeigt wurde, 21 Zeichenklassen der Form $(a \leq b \leq c \leq d \leq e \leq f)$; tut man es nicht, so lassen sich $9^3 = 729$ Zeichenklassen bilden. Bei der zweiten Variante sind es $27^3 = 10'683$ Zeichenklassen, wenn man als einzige Ordnung die einfache triadische Ordnung $a \leq d \leq g$ anerkennt.

2. Welche Variante man wählt, erweiterte Zeichenklassen haben eine Eigentümlichkeit, die man am besten dadurch darstellen kann, dass man sie nach dem in Toth (2008, S. 159 ff.) eingeführten Fahren als „dynamische“ Kategorien auffasst. Im Gegensatz zur statischen semiotischen Kategorietheorie, in der einfach jedem Subzeichen, aufgefasst als Semiose, ein Morphismus zugeordnet wird, trägt die dynamische semiotische Kategorietheorie der Tatsache Rechnung, dass das Peircesche Zeichen eine „verschachtelte Relation über Relationen“ ist (Bense 1979, S. 53, 67) ist, d.h. dass es nicht einfach eine 3-stellige Relation ist, sondern eine triadische Relation über einer

monadischen, einer dyadischen und eine triadischen Partialrelation, wobei die monadische in der dyadischen und beide in der triadischen Partialrelation inkludiert sind.

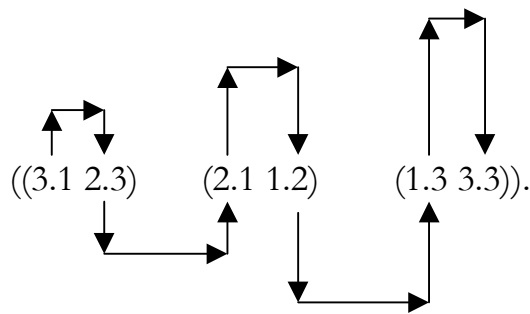
Nehmen wir als konkretes Beispiel die folgende Zeichenklasse:

$$\text{Zkl}^{\text{erw}} = ((3.1 \ 2.3) \ (2.1 \ 1.2) \ (1.3 \ 3.3)),$$

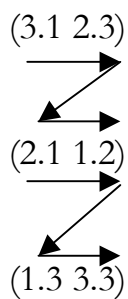
d.h. eine erweiterte Zeichenklasse vom Typ 2 mit der Inklusionsordnung ($a \leq d \leq g$). Dann können wir diese Zeichenklasse wie folgt in semiotisch-kategorie-theoretischer Notation schreiben:

$$\text{Zkl}^{\text{erw}} = [[\beta^\circ, \beta\alpha], [\text{id}_2, \alpha^\circ\beta^\circ], [\alpha^\circ, \alpha], [\text{id}_1, \beta], [\beta\alpha, \text{id}_3]]$$

Wir haben also folgende Verschachtelungen vorgenommen:



Wenn wir die drei Dyaden-Paare untereinander schreiben, sieht das so aus:



3. Wenn wir nun mit dieser kategoriellen Verschachtelung fortfahren, erhalten wir auf der nächsten Stufe:

$$[[\beta^\circ, \text{id}_2], [\beta\alpha, \alpha^\circ\beta^\circ], [\text{id}_2, \alpha^\circ], [\alpha^\circ\beta^\circ, \alpha], [\alpha^\circ, \text{id}_1], [\alpha, \beta], [\text{id}_1, \beta\alpha], [\beta, \text{id}_3]]$$

Auf einer dritten Stufe:

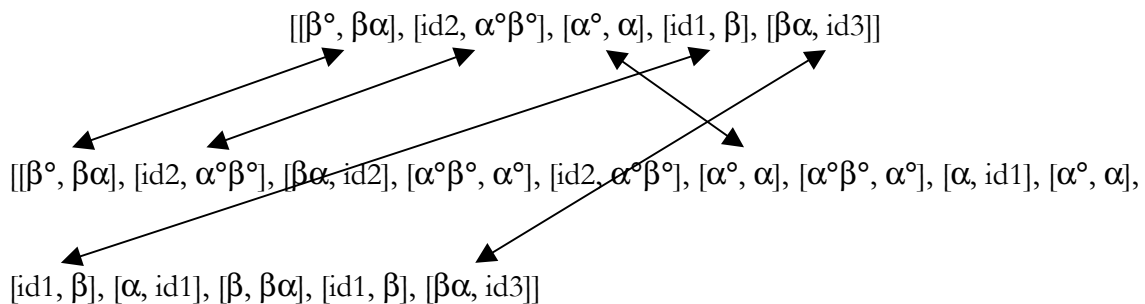
[[β° , $\beta\alpha$], [id_2 , $\alpha^\circ\beta^\circ$], [$\beta\alpha$, id_2], [$\alpha^\circ\beta^\circ$, α°], [id_2 , $\alpha^\circ\beta^\circ$], [α° , α], [$\alpha^\circ\beta^\circ$, α°], [α , id_1], [α° , α], [id_1 , β], [α , id_1], [β , $\beta\alpha$], [id_1 , β], [$\beta\alpha$, id_3]]

Und auf einer vierten Stufe:

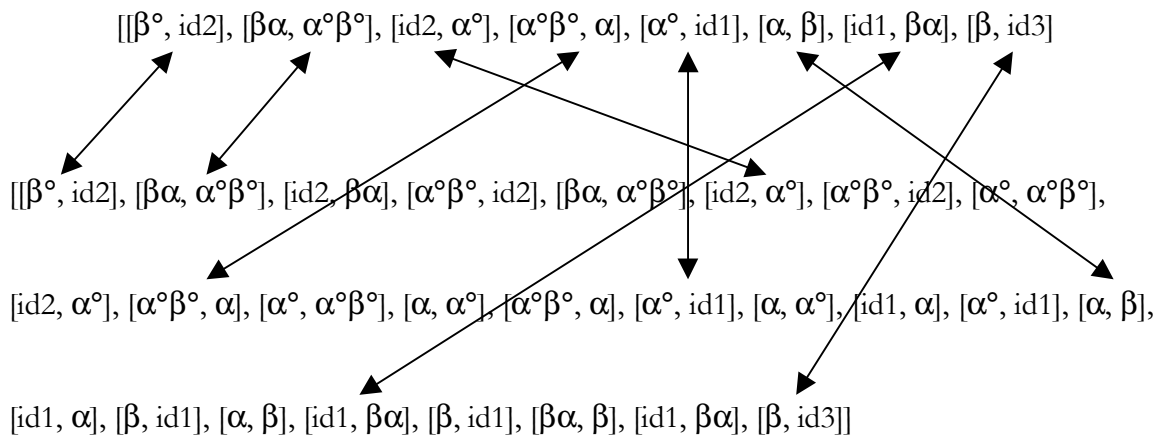
[[β° , id_2], [$\beta\alpha$, $\alpha^\circ\beta^\circ$], [id_2 , $\beta\alpha$], [$\alpha^\circ\beta^\circ$, id_2], [$\beta\alpha$, $\alpha^\circ\beta^\circ$], [id_2 , α°], [$\alpha^\circ\beta^\circ$, id_2], [α° , $\alpha^\circ\beta^\circ$], [id_2 , α°], [$\alpha^\circ\beta^\circ$, α], [α° , $\alpha^\circ\beta^\circ$], [α , α°], [$\alpha^\circ\beta^\circ$, α], [α° , id_1], [α , α°], [id_1 , α], [α° , id_1], [α , β], [id_1 , α], [β , id_1], [α , β], [id_1 , $\beta\alpha$], [β , id_1], [$\beta\alpha$, β], [id_1 , $\beta\alpha$], [β , id_3]]

Nun vergleichen wir die geraden und die ungeraden Stufen untereinander:

n = 1 und n = 3:



n = 2 und n = 4:



Wir sehen also, dass die verschachtelten kategoriellen Strukturen einer Stufe n Teilmengen der iterierten verschachtelten kategoriellen Strukturen einer Stufe $(n+1)$ sind, und zwar gesondert für gerades und für ungerades n .

4. Eine weitere Besonderheiten – neben der Teilmengenbeziehungen zwischen je zwei geraden oder ungeraden Stufen – findet man in einer Art von Slots, die man auf der jeweils vorangehenden Stufe einer geraden oder ungeraden Stufe (d.h. also allgemein $n \leftarrow (n+2)$) postulieren kann, und zwar hat die Stufe n gegenüber der nächsten Stufe $(n+2)$ immer 3 Slots oder „kategoriale Spuren“, wobei die ersten zwei Morphismen sowohl im geraden wie im ungeraden Fall ausgenommen sind:

($n = 2$) \rightarrow ($n = 4$):

$[[\beta^\circ, \text{id}_2], [\beta\alpha, \alpha^\circ\beta^\circ], \text{---}, \text{---}, \text{---}, [\text{id}_2, \alpha^\circ], \text{---}, \text{---}, \text{---}, [\alpha^\circ\beta^\circ, \alpha], \text{---}, \text{---}, \text{---}, [\alpha^\circ, \text{id}_1], \text{---}, \text{---}, \text{---}, [\alpha, \beta], \text{---}, \text{---}, \text{---}, [\text{id}_1, \beta\alpha], \text{---}, \text{---}, \text{---}, [\beta, \text{id}_3]]$



$[[\beta^\circ, \text{id}_2], [\beta\alpha, \alpha^\circ\beta^\circ], [\text{id}_2, \beta\alpha], [\alpha^\circ\beta^\circ, \text{id}_2], [\beta\alpha, \alpha^\circ\beta^\circ], [\text{id}_2, \alpha^\circ], [\alpha^\circ\beta^\circ, \text{id}_2], [\alpha^\circ, \alpha^\circ\beta^\circ], [\text{id}_2, \alpha^\circ], [\alpha^\circ\beta^\circ, \alpha], [\alpha^\circ, \alpha^\circ\beta^\circ], [\alpha, \alpha^\circ], [\alpha^\circ\beta^\circ, \alpha], [\alpha^\circ, \text{id}_1], [\alpha, \alpha^\circ], [\text{id}_1, \alpha], [\alpha^\circ, \text{id}_1], [\alpha, \beta], [\text{id}_1, \alpha], [\beta, \text{id}_1], [\alpha, \beta], [\text{id}_1, \beta\alpha], [\beta, \text{id}_1], [\beta\alpha, \beta], [\text{id}_1, \beta\alpha], [\beta, \text{id}_3]]$

($n = 1$) \rightarrow ($n = 3$):

$[[\beta^\circ, \beta\alpha], [\text{id}_2, \alpha^\circ\beta^\circ], \text{---}, \text{---}, \text{---}, [\alpha^\circ, \alpha], \text{---}, \text{---}, \text{---}, [\text{id}_1, \beta], \text{---}, \text{---}, \text{---}, \beta\alpha, \text{id}_3]]$



$[[\beta^\circ, \beta\alpha], [\text{id}_2, \alpha^\circ\beta^\circ], [\beta\alpha, \text{id}_2], [\alpha^\circ\beta^\circ, \alpha^\circ], [\text{id}_2, \alpha^\circ\beta^\circ], [\alpha^\circ, \alpha], [\alpha^\circ\beta^\circ, \alpha^\circ], [\alpha, \text{id}_1], [\alpha^\circ, \alpha], [\text{id}_1, \beta], [\alpha, \text{id}_1], [\beta, \beta\alpha], [\text{id}_1, \beta], [\beta\alpha, \text{id}_3]]$

Schliesslich und endlich finden wir als dritte bemerkenswerte Eigenschaft, dass die Anzahl der Morphismen pro verschachtelter kategorieller Struktur eine einzigartige Zahlenfolge generiert, deren Anfang wie folgt aussieht:

| Stufe | Anzahl Morphismen |
|---------|-------------------|
| $n = 1$ | 5 |
| $n = 2$ | 8 |
| $n = 3$ | 14 |
| $n = 4$ | 26 |

Was das alles zu bedeuten hat, muss späteren Arbeiten überlassen werden.

Bibliographie

- Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1975
Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979
Toth, Alfred, Semiotische Strukturen und Prozesse. Klagenfurt 2008
Toth, Alfred, Die erweiterte Semiotik auf der Basis der Grossen Matrix. In:
Electronic Journal for Mathematical Semiotics (erscheint, 2009)

7.8.2009