**Prof. Dr. Alfred Toth**

# Semiotische Kategorien und Bikategorien

1. Die Hauptproblematik in der kategorietheoretischen Semiotik (vgl. Toth 1997, S. 21 ff.) liegt darin, was man als Objekt und was als Morphismus, d.h. als Abbildung festsetzt. Daraus folgt natürlich, dass es darauf ankommt, was worauf abgebildet ist.

Üblicherweise werden in der kategorietheoretischen Semiotik die Subzeichen als Objekte betrachtet und die Abbildung zwischen den Subzeichen als Morphismen definiert, und zwar geschieht dies meistens so:

$(1 \rightarrow 1) \equiv \mathrm{id}1$
$(2 \rightarrow 2) \equiv \mathrm{id}2$
$(3 \rightarrow 3) \equiv \mathrm{id}3$

$(1 \rightarrow 2) \equiv \alpha$
$(2 \rightarrow 3) \equiv \beta$,

woraus man dann die Konversen so definiert:

$(2 \rightarrow 1) \equiv \alpha°$
$(3 \rightarrow 2) \equiv \beta°$

und die Komponierte sowie ihre Konverse wie folgt:

$(1 \rightarrow 3) \equiv \beta\alpha$
$(3 \rightarrow 1) \equiv \alpha°\beta°$

Das grosse Problem dabei ist nur, dass die Subzeichen zugleich statischen und dynamischen Charakter haben, d.h. dass die Subzeichen selber zugleich als Semiosen aufgefasst werden können, und zwar so:

$(1 \rightarrow 1) \equiv (1.1)$
$(1 \rightarrow 2) \equiv (1.2)$
$(1 \rightarrow 3) \equiv (1.3)$

...

$(3 \rightarrow 3) \equiv (3.3)$,

was Bense (1975, S. 92) dazu veranlasst hat, von den beiden Phasen der Stabilität und des Prozesses von Zeichen zu sprechen.

2. Wenn wir also, statt die Subzeichen als Objekte zu betrachten, die Primzeichen, aus denen sie je zu einer dyadischen Relation zusammengesetzt sind, als Objekte nehmen, dann würden die obigen Abbildungen der Definitionen der semiotischen Morphismen bedeuten, dass hier nicht Objekte auf Objekte, sondern Morphismen auf Morphismen abgebildet werden, d.h. die Menge der Subzeichen würde dann nicht eine 1-Kategorie, d.h. eine „gewöhnliche" Kategorie bilden, sondern eine 2- oder sogar eine Bikategorie (vgl. Bénabou (1967). D.h., wenn wir als Objekt festsetzen:

(.1.), (.2.), (.3.),

dann wären die 1-Morphismen (wie wir sie hier der Einfachheit halber in unüblicher Manier bezeichnen wollen):

$(.1.) \rightarrow (.2.) \equiv \alpha$
$(.2.) \rightarrow (.3.) \equiv \beta$,

die Konversen und Komponierten entsprechend. Dann müssten wir aber die obigen Morphismen nun als 2-Morphismen abbilden. Wir wollen dies der Übersicht halber tun und verwenden für die „neuen" 2-Morphismen grosse statt kleine griechische und römische Buchstaben:

$(.1. \rightarrow .1.) \equiv \mathrm{ID}\ 1$
$(.2. \rightarrow .2.) \equiv \mathrm{ID}2$
$(.3. \rightarrow .3.) \equiv \mathrm{ID}3$
$(.1. \rightarrow .2.) \equiv \mathrm{A}$
$(.2. \rightarrow .3.) \equiv \mathrm{B}$,
$(.2. \rightarrow .1.) \equiv \mathrm{A}°$
$(.3. \rightarrow .2.) \equiv \mathrm{B}°$
$(.1. \rightarrow .3.) \equiv \mathrm{BA}$
$(.3. \rightarrow .1.) \equiv \mathrm{A}°\mathrm{B}°$.

3. Wie aber können wir die 2-Morphismen mit Hilfe der 1-Morphismen definieren? Dazu genügt es, die beiden fundamentalen 2-Morphismen anzuschauen:

$(.1. \rightarrow .2.) \equiv A$
$(.2. \rightarrow .3.) \equiv B.$

Das Problem liegt darin, dass A und B semiotisch nicht eindeutig sind, denn es ergeben sich je zwei Möglichkeiten sowie ihre Kombinationen:

$$(.1. \rightarrow .2.) \equiv A \quad \begin{array}{l} \nearrow (.1 \rightarrow .2) \\ \\ \searrow (1. \rightarrow 2.) \end{array}$$

Kombinationen: $(.1 \rightarrow .2)$, $(.1 \rightarrow 2.)$, $(1. \rightarrow 2.)$, $(1. \rightarrow .2)$

$$(.2. \rightarrow .3.) \equiv B. \quad \begin{array}{l} \nearrow (.2 \rightarrow .3) \\ \\ \searrow (2. \rightarrow 3.) \end{array}$$

Kombinationen: $(.2 \rightarrow .3)$, $(.2 \rightarrow 3.)$, $(2. \rightarrow 3.)$, $(2. \rightarrow .3)$,

d.h. A und B sind also „portemanteau“-Graphien (wie man in der Linguistik sagen würden) für die folgenden 8 verschiedenen 1-Morphismen, die wir z.B. wie folgt definieren können:

| | |
|---|---|
| $(.1 \rightarrow .2) \equiv \alpha_{00}$ | $(.2 \rightarrow .3) \equiv \beta_{00}$ |
| $(.1 \rightarrow 2.) \equiv \alpha_{01}$ | $(.2 \rightarrow 3.) \equiv \beta_{01}$ |
| $(1. \rightarrow 2.) \equiv \alpha_{11}$ | $(2. \rightarrow 3.) \equiv \beta_{11}$ |
| $(1. \rightarrow .2) \equiv \alpha_{10}$ | $(2. \rightarrow .3) \equiv \beta_{10}$ |

Daraus folgt also, dass jedes der 9 Subzeichen 4 Möglichkeiten der Definition verbirgt – als „portemanteau“-Kategorie. Die Komponierten können daher wie folgt definiert werden:

$(1.3) = \{(.1 \rightarrow .3), (.1 \rightarrow 3.), (1. \rightarrow .3), (1. \rightarrow 3.)\} = \{\beta\alpha_{00}, \beta\alpha_{01}, \beta\alpha_{11}, \beta\alpha_{10}\}$,
wobei sich hier unter den 4 2-Morphismen streng genommen, da sie ja aus zwei 1-Morphismen mit je 4 Möglichkeiten komponiert sind, für jede der beiden

Kompositionsglieder wieder 4 Möglichkeiten ergeben, d.h. $\beta\alpha_{00}$, $\beta\alpha_{01}$, $\beta\alpha_{11}$, $\beta\alpha_{10}$ sind selber Portementeau-Morphismen, die wir in Analogie zu 2-Kategorien und 2-Morphismen als 2-Portemanteau-Morphismen bezeichnen müssen. Es handelt sich hier natürlich um keine anderen als die bereits definierten zwei Basis-1-Morphismen:

$(.1 \rightarrow .2) \equiv \alpha_{00}$ $\quad$ $(.2 \rightarrow .3) \equiv \beta_{00}$
$(.1 \rightarrow 2.) \equiv \alpha_{01}$ $\quad$ $(.2 \rightarrow 3.) \equiv \beta_{01}$
$(1. \rightarrow 2.) \equiv \alpha_{11}$ $\quad$ $(2. \rightarrow 3.) \equiv \beta_{11}$
$(1. \rightarrow .2) \equiv \alpha_{10}$ $\quad$ $(2. \rightarrow .3) \equiv \beta_{10}$,

d.h. die 2-Portemanteau-Morphismen $\beta\alpha_{00}$, $\beta\alpha_{01}$, $\beta\alpha_{11}$, $\beta\alpha_{10}$ können aus insgesamt 4 x 4 = 16 1-Morphismen komponiert sein, es handelt sich hier also um Komposition der Komposition und damit um 2-Komposition oder Bi-Komposition:

$\beta_{00} \circ \alpha_{00}$ $\quad$ $\beta_{01} \circ \alpha_{00}$ $\quad$ $\beta_{11} \circ \alpha_{00}$ $\quad$ $\beta_{10} \circ \alpha_{00}$
$\beta_{00} \circ \alpha_{01}$ $\quad$ $\beta_{01} \circ \alpha_{01}$ $\quad$ $\beta_{11} \circ \alpha_{01}$ $\quad$ $\beta_{10} \circ \alpha_{01}$
$\beta_{00} \circ \alpha_{11}$ $\quad$ $\beta_{01} \circ \alpha_{11}$ $\quad$ $\beta_{11} \circ \alpha_{11}$ $\quad$ $\beta_{10} \circ \alpha_{11}$
$\beta_{00} \circ \alpha_{10}$ $\quad$ $\beta_{01} \circ \alpha_{10}$ $\quad$ $\beta_{11} \circ \alpha_{10}$ $\quad$ $\beta_{10} \circ \alpha_{10}$

Für die Konversen Komponierten wird natürlich einfach die „Pfeilrichtung umgekehrt“, wie McLane sich ausdrückte, oder einfach die Ordnung der Kompositionsglieder vertauscht.

## Bibliographie


Bénabou, Jean, Introduction to bicategories, part I. In: Reports of the Midwest Category Seminar, Lecture Notes in Mathematics 47, 1967, S. 1-77

Toth, Alfred, Entwurf einer Semiotisch-Relationalen Grammatik. Tübingen 1997


22.8.2009