Prof. Dr. Alfred Toth

Der Zusammenhang von Kategorien und Spuren durch Identitätsfelder

1. Wie bereits in Toth (2009b) vorsichtig angetönt, gibt es einen Zusammenhang zwischen der semiotischen Kategorietheorie und der semiotischen Spurentheorie, so zwar, dass sich die Semiotik anstatt durch Kategorien (vgl. Toth 1997, S. 21 ff.) auch durch Spuren aufbauen lässt. (Evidenz für die anschliessende Frage, ob auch weitere mathematische Systeme durch die komplementäre Spurentheorie begründet werden können, muss an dieser Stelle wegbleiben.) In Toth (2006/2008) war ja gezeigt worden, dass sich die Semiotik, genauso wie die Mathematik, auf den fundamentalen Begriffen der Zahl, der Menge und der Kategorien aufbauen lassen. Nur am Rande sei erwähnt, dass der in Toth (2009a) eingeführte Begriff der Spur nichts mit dem homonymen Begriff der linearen Algebra zu tun hat.

2. Nehmen wir an, der folgende Ausdruck repräsentiere einen kategorietheoretischen Zeichenzusammenhang (vgl. Toth 1997, S. 21 ff.):

$[\alpha, \beta, \beta\alpha, \beta, \alpha°\beta°, \mathrm{id3}, \alpha, \mathrm{id2}, \beta°]$.

Da eine Kategorie aus zwei Objekten, einer Domäne und einer Codomäne, sowie einer Abbildung zwischen ihnen besteht, kann man also in eineindeutiger Weise Objekte aus Morphismen rekonstruieren. Damit ist also der folgende Ausdruck mit vorstehenden semiotisch äquivalent:

Kat = [[M.O], [O.I], [M.I], [O.I], [I.M], [I.I], [M.O], [O.O], [I.O]].

Da Spuren separat auf Domänen bzw. Codomänen separat definiert sind, wobei die Menge aller Domänen in der Semiotik triadische Hauptwerte (Td) und die Menge aller Codomänen trichotomische Stellenwerte (Tt) heissen, können wir ebenfalls in eineindeutiger Weise die beiden Spuren aus dem obigen kategorietheoretischen Ausdruck rekonstruieren:

Spu(Td) = [OMOIIMOI]
Spu(Tt) = [IIIMIOOO].

3. An dieser Stelle wollen wir uns kurz überlegen, welche strukturellen Minimalbedingungen für Kategorien einerseits und für Spuren andererseits erfüllt sein müssen. Wie man aus dem folgenden sieht, empfiehlt es sich, vorab zwischen einfachen und komplexen (= zusammengesetzten) Kategorien zu unterscheiden.

3.1. Minimum einfache Kategorie =

$A \rightarrow B$
$m(A \rightarrow B) = [a.b]$

3.2. Minimum einfache Spur =

$A \rightarrow B \rightarrow C$
$s(A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow [[b.c], [c.a]]$

Eine einfache Spur setzt damit mindestens 3 Objekte und 2 Abbildungen voraus.

3.3. Minimum komplexe Kategorie =

$A.B \rightarrow C.D$
$m(A \rightarrow C) = [a.c]$
$m(B \rightarrow D) = [b.d]$

3.4. Minimum komplexe Spur =

$A.B \rightarrow C.D \rightarrow E.F$
$s(A \rightarrow C \rightarrow E) \rightarrow [[c.e], [e.a]]$
$s(B \rightarrow D \rightarrow F) \rightarrow [[d.f] [f.b]]$

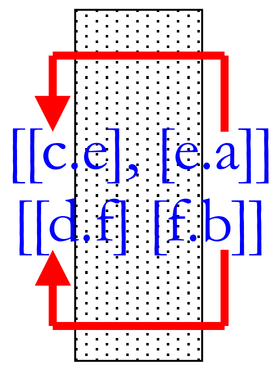
Eine komplexe Spur besteht damit mindestens aus einem Paar von paarweisen Abbildungen.

4. Wenn wir nun von einer minimalen komplexen Spur ausgehen, d.h. von der Struktur

A.B → C.D → E.F
s(A → C → E) → [[c.e], [e.a]]
s(B → D → F) → [[d.f] [f.b]],

dann sehen wir einen höchst bemerkenswerten Zusammenhang zwischen Spuren und Kategorien.

Wir haben also (blau Spuren, rot Kategorien, schraffiert Identitätsfeld):



Eine minimale komplexe Kategorie ist damit die konverse Relation aus der Codomäne des 2. Gliedes und der Domäne des 1. Gliedes eines Paares von Abbildungen, sofern die Codomäne des 1. Gliedes und die Domäne des 2. Gliedes identisch sind.

Bibliographie

Toth, Alfred, Entwurf einer semiotisch-relationalen Grammatik. Tübingen 1997

Toth, Alfred, Grundlegung einer mathematischen Semiotik. 2. Aufl. Klagenfurt 2008

Toth, Alfred, Kategoriale Spuren. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics (erscheint, 2009a)

Toth, Alfred, Spurenklassen. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics (erscheint, 2009b)

22.10.2009