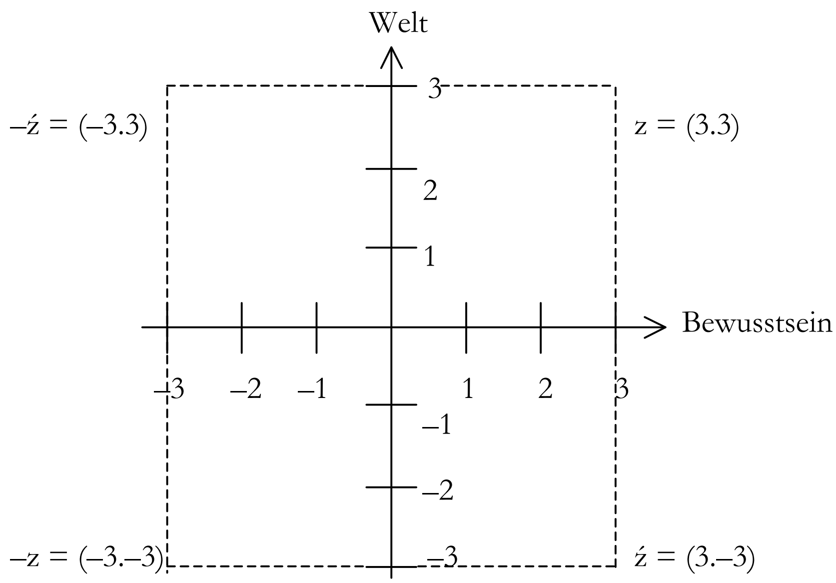
Prof. Dr. Alfred Toth

Von der komplexen zur quaternionären Semiotik

1. Die komplexe Semiotik wurde erstmals in Toth (2001) und (2003) und ausführlich in Toth (2007, S. 52 ff.) sowie (2008a, S. 52 ff.) vorgestellt. Sie beruht auf der Abbildung der kleinen semiotischen Matrix auf die Gaußsche Zahlenebene. Wie man leicht zeigt, entsprechen die vier Typen komplexer Zahlen z, –ź, –z und ź (in dieser Reihenfolge) den vier Parameterpaaren und charakterisieren somit die vier semiotischen Quadranten. Die Gaußsche Zahlenebene läßt sich somit als komplexe semiotische Ebene auffassen:

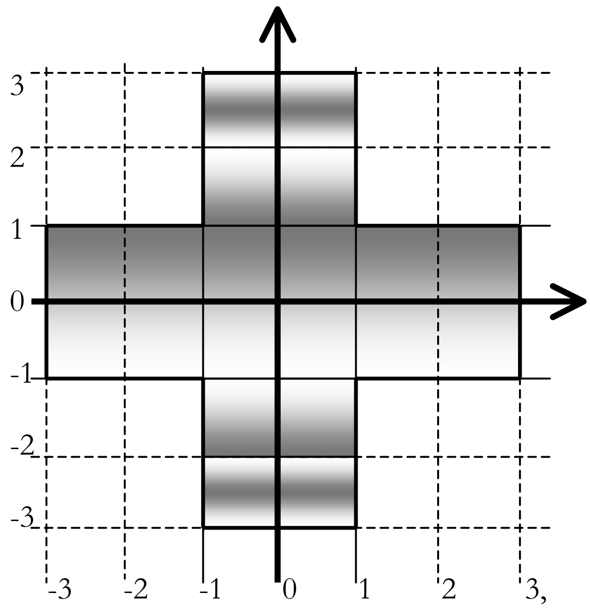


In einer komplexen Semiotik verlieren also die negativen Kategorien ihren vielleicht auf das erste Besehen befremdlichen Charakter.

2. Eine Erweiterung des Modell einer komplexen Semiotik wurde in Toth (2008c) vorgeschlagen: In dem unten stehenden Modell ist der grau schraffierte Raum durch die folgenden Funktionswerte ausgezeichnet:

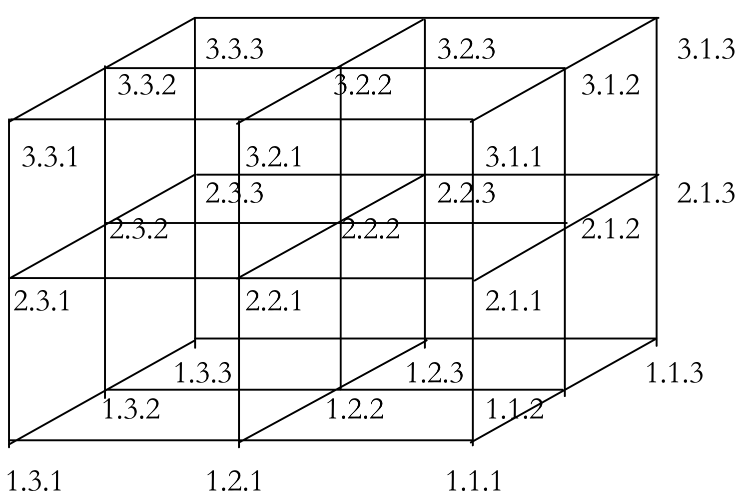
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	±1	±1	±1	±1	±1	±1	±1

y	-3	-2	-1	0	1	2	3
x	±1	±1	±1	±1	±1	±1	±1



Das sind also die in einer komplexen Semiotik nicht definierten Punkte der Gaußschen Zahlenebene. Wird nun die triadische Zeichenrelation (3.a 2.b 1.c) zu einer tetradischen Zeichenrelation (3.a 2.b 1.c 0.d) erweitert, so dass das durch das Zeichen bezeichnete Objekte kategorial innerhalb der Zeichenrelation mitgeführt wird, indem die kontexturale Grenze zwischen Zeichen und Objekt aufgehoben wird (vgl. Toth 2008b), dann ist auch der grau schraffierte Raum definiert, allerdings mit Ausnahme des Ursprung (0.0), da gemäss der Festsetzung von Bense (1975, S. 45 f.) Relationalzahlen stets grösser als 0 sind und eine iterierte Kategorialzahl 0.0 daher unmöglich ist.

3. Eine Erweiterung der nicht-komplexen 2-dimensionalen Semiotik zu einer 3-dimensionalen Semiotik hatte Hans Michael Stiebing in seiner Dissertation vorgeschlagen (1978, S. 77):



Einige Weiterentwicklungen dieses Zeichenkubus stammen vom gegenwärtigen Verfasser (Toth 2009a-e).

4. Wie man erkennt, besteht der Stiebingsche Zeichenkubus in der Projektion einer Ebene von 9 3-dimensionalen Subzeichen auf zwei weitere Zeichenebenen. ein dreidimensionales Subzeichen hat danach die allgemeine Form

SZ = (a.b.c),

wobei a die semiotische Dimensionszahl, b der triadische Hauptwerk und c der trichotomische Stellenwert des Subzeichens ist. Daraus folgt, dass eine 3-dimensionale Zeichenklasse die allgemeine Form

3-ZR = (a.3.b c.2.d e.1.f)

hat, wobei natürlich die semiotische inklusive Ordnung ($b \leq d \leq f$) gilt.

Wenn man also den Stiebingschen Zeichenkubus zur Ausgangsbasis einer 3-dimensionalen (hyper-) komplexen Semiotik macht, kann man die allgemeine Form 3-dimensionaler Zeichenklassen wie folgt notieren

3*-ZR = (±a.±3.±b ±c.±2.±d ±e.±1.±f)

Nun war bereits in Toth (2002) gezeigt worden, dass Zeichenklassen im 2-dimensionalen komplexen semiotischen Raum durch lineare Transformationen wie etwa Drehungen aufeinander abgebildet werden können. Allerdings haben wir es nun mit der Drehung 3-dimensionaler Zeichenklassen zu tun, weshalb wir 3*-ZR als allgemeine Form **semiotischer Quaternionen** definieren, denn jedes Quaternion lässt sich eindeutig in der Form

$x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$

darstellen.

Eine Algebra A ist eine Divisionsalgebra, falls, wenn a, b $\in$ A mit ab = 0, dann ist entweder a = 0 oder b = 0 d.h. A ist eine Divisionsalgebra, wenn Links- und Rechtsmultiplikation durch einen Faktor $\neq 0$ umkehrbar sind. Eine normierte Divisionsalgebra ist eine Algebra A, welche zugleich ein normierter Vektorraum ist mit $\|ab\| = \|a\| \, \|b\|$. Es gibt genau vier normierte Divisionsalgebren: **R**, **C**, **H** und **O**. Daß eine Algebra assoziativ ist, bedeutet, daß die durch beliebige drei Elemente von A erzeugte Subalgebra assoziativ ist. **O** ist zwar nicht-assoziativ, aber alternativ, was bedeutet, daß die durch beliebige zwei Elemente erzeugte Subalgebra assoziativ ist. (Alternativität ist also eine schwächere Bedingung als Assoziativität.) Es gelten folgende Sätze:

Satz von Zorn: R, **C**, **H** und **O** sind die einzigen alternativen Divisionsalgebren.

Satz von Kervaire-Bott-Milnor: Alle Divisionsalgebren haben Dimension 1, 2, 4 oder 8.

Wie in Toth (2007, S. 50 ff.) bewiesen wurde, ist die 2-dimensionale triadische Semiotik **S** isomorph zu **R**. Wie in Toth (2007, S. 60 f.) bewiesen wurde, ist sie ebenfalls isomorph zu **C**.

Nur indirekt liess sich in Toth (2007, S. 62 f.) jedoch die Isomorphie der 3-dimensionalen triadischen Semiotik **S*** mit den Schiefkörpern **H** und **O**, d.h. den Quaternionen und den Oktonionen, aufzeigen, denn die Konstruktion von semiotischen Einheiten wie Subzeichen, Zeichenrümpfen, Zeichenklassen und Realitätsthematiken aus 4- bzw. 8-dimensionalen Gliedern war damals noch ungelöst. Deshalb wurden die Sätze von Frobenius und von Peirce benutzt, welche **H** als einzigen echten endlich-dimensionalen Schiefkörper über **R** charakterisieren:

Satz von Frobenius: "Wir sind also zu dem Resultate gelangt, daß außer den reellen Zahlen, den imaginären Zahlen und den Quaternionen keine andern complexen Zahlen in dem oben definirten Sinne existieren" (Frobenius 1878, S. 63).

Satz von Peirce: "Thus it is proved that a fourth independent vector is impossible, and that ordinary real algebra, ordinary algebra with imaginaries, and real quaternions are the only associative algebras in which division by finites yields an unambiguous quotient" (Peirce 1881, S. 229).

Aus diesen Sätzen folgt also die Isomorphie von **S*** mit **H**. Da nun die Semiotik nicht nur assoziativ, sondern auch alternativ ist und da wir den Satz von Zorn bzw. den folgenden Struktursatz haben:

Satz von Zorn: Jede nullteilerfreie, alternative, quadratisch reelle, aber nicht assoziative Algebra A ist zur Cayley-Algebra **O** isomorph (Ebbinghaus 1992, S. 216).

Struktursatz: Jede nullteilerfreie, alternative, quadratisch reelle Algebra ist isomorph zu **R**, **C**, **H** oder **O.** (Ebbinghaus 1992, S. 216),

so folgt hieraus die Isomorphie von **S*** mit **O**. Da nun erstens im Falle von **H** und **O** die Loop-Eigenschaft einen guten Ersatz bietet für die fehlende Assoziativität einer Divisionsalgebra (vgl. Conway und Smith 2003, S. 88), da zweitens, wie in Toth (2007, S. 46 f.) gezeigt wurde, semiotische Gruppen moufangsch sind, und da drittens **R**, **C**, **H** und **O** selber Moufang-Loops sind, folgt auch hieraus die Isomorphie von **S*** mit **H** und **O**, so dass wir also schon vor der vorliegenden Arbeit berechtigt waren, von **semiotischen Schiefkörpern** bzw. von **hyperkomplexer** (quarternionärer bzw. oktonionärer) **Semiotik** zu sprechen.

5. Auf den folgenden Seiten präsentiere ich nun ein erstes Modell einer quaternionären Semiotik, in dem der Zeichenkubus in einem 3-dimensionalen Koordinatensystem, das um die Achse der 4. Dimension ergänzt zu denken ist (aber aus Gründen der Übrsichtlichkeit weggelassen ist), entsprechend der Darstellung quaternionärer Einheitsprodukte als 90°-Drehungen wie im ersten Bild von S. 5, 4 mal erscheint.