

Prof. Dr. Alfred Toth

Zur Theorie der Relationalzahlen III

1. In diesem dritten Teil unserer Untersuchungen zu den Relationalzahlen, die durch Bense (1980) in die Semiotik eingeführt wurden, geht es um semiotische Mengen und ihre Klassifikation als Körper, Schiefkörper oder (assoziative bzw. kommutative) Algebren. Der folgende Text ist eine revidierte Fassung aus Toth (2007).

2. Semiotische Körper

Sei K die Menge mit den Elementen 0 und 1, d.h. $K = \{0, 1\}$, und den zwei inneren Verknüpfungen Addition ("+") und Multiplikation ("·"), die wie folgt definiert seien:

$$0 + 0 = 0 \quad 0 \cdot 0 = 0$$

$$0 + 1 = 1 \quad 0 \cdot 1 = 0$$

$$1 + 0 = 1 \quad 1 \cdot 0 = 0$$

$$1 + 1 = 0 \quad 1 \cdot 1 = 1$$

Es wird gezeigt, daß K die Körperaxiome erfüllt. Die Kommutativität der Addition ist erfüllt:

$$0 + 0 = 0 + 0 = 0$$

$$0 + 1 = 1 + 0 = 1$$

$$1 + 1 = 1 + 1 = 0$$

Die Assoziativität der Addition ist ebenfalls erfüllt:

$$0 + (0 + 0) = (0 + 0) + 0 = 0$$

$$0 + (0 + 1) = (0 + 0) + 1 = 1$$

$$0 + (1 + 0) = (0 + 1) + 0 = 1$$

$$1 + (0 + 1) = (1 + 0) + 1 = 0$$

$$1 + (1 + 0) = (1 + 1) + 0 = 0$$

$$1 + (1 + 1) = (1 + 1) + 1 = 1$$

Die Kommutativität der Multiplikation ist erfüllt:

$$0 \cdot 0 = 0 \cdot 0 = 0$$

$$0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$$

$$1 \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1$$

Ebenso ist die Assoziativität der Multiplikation erfüllt:

$$0 \cdot (0 \cdot 0) = (0 \cdot 0) \cdot 0 = 0$$

$$0 \cdot (0 \cdot 1) = (0 \cdot 0) \cdot 1 = 0$$

$$0 \cdot (1 \cdot 0) = (0 \cdot 1) \cdot 0 = 0$$

$$1 \cdot (0 \cdot 1) = (1 \cdot 0) \cdot 1 = 0$$

$$1 \cdot (1 \cdot 0) = (1 \cdot 1) \cdot 0 = 0$$

$$1 \cdot (1 \cdot 1) = (1 \cdot 1) \cdot 1 = 1$$

Gültig sind auch die Distributivgesetze:

$$0 \cdot (0 + 0) = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0 \quad (0 + 0) \cdot 0 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0$$

$$0 \cdot (0 + 1) = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0 \quad (0 + 1) \cdot 0 = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0$$

$$0 \cdot (1 + 0) = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0 \quad (1 + 0) \cdot 0 = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0$$

$$1 \cdot (0 + 1) = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1 \quad (0 + 1) \cdot 1 = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1$$

$$1 \cdot (1 + 0) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 1 \quad (1 + 0) \cdot 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 1$$

$$1 \cdot (1 + 1) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 0 \quad (1 + 1) \cdot 1 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 0$$

Auch die Umkehrbarkeit der Addition ist erfüllt:

$$0 - 0 = 0 + 0 = 0$$

$$0 - 1 = 0 + 1 = 1$$

$$1 - 0 = 1 + 0 = 1$$

$$1 - 1 = 1 + 1 = 0,$$

d.h. $x = b - a = b + a$. Entsprechendes gilt für die Umkehrbarkeit der Multiplikation.

Ersetzen wir die semiotische Matrix durch die entsprechende Leerstellen-Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und ersetzen wir $0 \rightarrow 1$ überall dort, wo wir das entsprechende Subzeichen benötigen, so folgt, dass die semiotische Menge K die Körperaxiome der reellen Zahlen \mathbb{R} erfüllt und somit einen semiotischen Körper darstellt.

Zum Nachweis der Isomorphie von K mit dem Körper der komplexen Zahlen \mathbb{C} vgl. Toth (2007, Kap. 2.5.2).

3. Semiotische Schiefkörper

Der Aufbau des Zahlensystems von den natürlichen bis zu den komplexen Zahlen basiert auf dem sogenannten Permanenzprinzip (Oberschelp 1976, S. 11 ff.): In \mathbb{N} kann nicht immer die Differenz gebildet werden, also werden als neue Zahlen die negativen Zahlen \mathbb{Z} eingeführt. Da in \mathbb{Z} nicht alle Divisionen ausgeführt werden können, führt man die rationalen Zahlen \mathbb{Q} ein. Die Forderung, daß jede Cauchy-Folge konvergiert, führt zu \mathbb{R} , und die Lösbarkeit aller algebraischen Gleichungen, also auch von $x^2 + 1 = 0$, liefert \mathbb{C} . Bei allen diesen Zahlbereichen von \mathbb{N} bis und mit \mathbb{C} handelt es sich um Körper.

1843 erfand Hamilton die Quaternionen, kurz darauf konstruierten Graves und Cayley die Oktonionen (Oktaven). Diese neuen „hyperkomplexen“ Zahlensysteme sind nun aber keine Körper mehr, denn bei den Quaternionen ist das Kommutativgesetz und bei den Oktonionen zusätzlich das Assoziativgesetz der Multiplikation verletzt, es gibt aber noch zu jedem Element $\neq 0$ ein Inverses, weshalb die Division eindeutig ausführbar bleibt und solche Algebren auch Divisionsalgebren genannt werden.

Eine Algebra A ist eine Divisionsalgebra, falls, wenn $a, b \in A$ mit $ab = 0$, dann ist entweder $a = 0$ oder $b = 0$ d.h. A ist eine Divisionsalgebra, wenn Links- und Rechtsmultiplikation durch einen Faktor $\neq 0$ umkehrbar sind. Eine normierte Divisionsalgebra ist eine Algebra A , welche zugleich ein normierter Vektorraum ist mit $\|ab\| = \|a\| \|b\|$. Es gibt genau vier normierte Divisionsalgebren: \mathbb{R} , \mathbb{C} , \mathbb{H} und \mathfrak{D} . Dass eine Algebra assoziativ ist, bedeutet, dass die durch beliebige drei Elemente von A erzeugte Subalgebra assoziativ ist. \mathfrak{D} ist zwar nicht-assoziativ, aber alternativ, was bedeutet, daß die durch beliebige zwei Elemente erzeugte Subalgebra assoziativ ist. (Alternativität ist also eine schwächere Bedingung als Assoziativität.) Es gelten folgende Sätze:

Satz von Zorn: \mathbb{R} , \mathbb{C} , \mathbb{H} und \mathfrak{D} sind die einzigen alternativen Divisionsalgebren.

Satz von Kervaire-Bott-Milnor: Alle Divisionsalgebren haben Dimension 1, 2, 4 oder 8.

Wie wir letzten Kapitel gesehen haben, ist die Peirce-Bense-Semiotik isomorph zu \mathbb{R} und \mathbb{C} .

Nur indirekt dagegen läßt sich die Isomorphie der Semiotik mit den Schiefkörpern \mathbb{H} und \mathfrak{D} beweisen, denn die Konstruktion von semiotischen Einheiten wie Subzeichen, Zeichenrümpfen, Zeichenklassen und Realitätsthematiken aus 4- bzw. 8-dimensionalen Gliedern ist bisher ungelöst. Doch haben wir die Sätze von Frobenius und von Peirce, welche \mathbb{H} als einzigen echten endlich-dimensionalen Schiefkörper über \mathbb{R} charakterisieren:

Satz von Frobenius: “Wir sind also zu dem Resultate gelangt, dass ausser den reellen Zahlen, den imaginären Zahlen und den Quaternionen keine andern complexen Zahlen in dem oben definirten Sinne existieren” (Frobenius 1878, S. 63).

Satz von Peirce: “Thus it is proved that a fourth independent vector is impossible, and that ordinary real algebra, ordinary algebra with imaginaries, and real quaternions are the only associative algebras in which division by finites yields an unambiguous quotient” (Peirce 1881, S. 229).

Daraus folgt also die Isomorphie der Semiotik mit \mathbb{H} . Da nun die Semiotik nicht nur assoziativ, sondern auch alternativ ist und da wir den Satz von Zorn bzw. den folgenden Struktursatz haben:

Satz von Zorn: Jede nullteilerfreie, alternative, quadratisch reelle, aber nicht assoziative Algebra A ist zur Cayley-Algebra \mathfrak{D} isomorph (Ebbinghaus et al. 1992, S. 216).

Struktursatz: Jede nullteilerfreie, alternative, quadratisch reelle Algebra ist isomorph zu \mathbb{R} , \mathbb{C} , \mathbb{H} oder \mathfrak{D} . (Ebbinghaus et al. 1992, S. 216),

so folgt hieraus die Isomorphie der Semiotik mit \mathfrak{D} . Da ferner im Falle von \mathbb{H} und \mathfrak{D} die Loop-Eigenschaft einen guten Ersatz bietet für die fehlende Assoziativität einer Divisionsalgebra (vgl. Conway und Smith 2003, S. 88), da, wie wir in Toth (2007) gezeigt haben, semiotische Gruppen Moufangsch sind und da \mathbb{R} , \mathbb{C} , \mathbb{H} und \mathfrak{D} selber Moufang-Loops sind, folgt auch hieraus die Isomorphie der Semiotik mit \mathbb{H} und \mathfrak{D} , so daß wir also berechtigt sind, von semiotischen Schiefkörpern bzw. von hyperkomplexer (quaternionärer bzw. oktonionärer) Semiotik zu sprechen.

Nachbemerkung: Da der Satz von Wedderburn besagt, dass jeder endliche Schiefkörper ein Körper ist, und da die semiotische Menge $S = (1, 2, 3)$ bzw. $K = (1, 0)$ endlich sind, könnte man – falls es nicht so mühsam ist –, zuerst den Schiefkörper-Nachweis der Semiotik erbringen und darauf den Körpernachweis folgern. Es ist indessen viel einfacher so vorzugehen, wie wir es hier getan haben.

Bibliographie

Bense, Max, Die Einführung der Primzeichen. In: *Ars Semeiotica* III/3, 1980

Conway, John Horton/Smith, Derek Alan, *On Quaternions and Octonions*. Natick, Ma. 2003

Ebbinghaus, Heinz-Dieter (et al.), *Zahlen*. Heidelberg 1992

Frobenius, Ferdinand Georg, Über lineare Substitutionen und bilineare Formen. In: *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* 84, 1878, S. 1-63

Oberschelp, Arnold, *Aufbau des Zahlensystems*. 3. Aufl. Göttingen 1976

Peirce, Charles Sanders, On the algebras in which division is unambiguous. In: *American Journal of Mathematics* 4, 1881, S. 225-229

Toth, Alfred, *Zwischen den Kontexturen*. Klagenfurt 2007

13.4.2011