Prof. Dr. Alfred Toth

Die semiotischen Relationalzahlen

1. Im Rahmen seiner Einführung der „Primzeichen" hatte Bense festgehalten: „Man bemerkt leicht, dass damit die Kardinalzahl der fundamentalkategorialen Erstheit, die Ordinalzahl der fundamentalkategorialen Zweitheit und die Realtionalzahl der fundamentalkategorialen Drittheit angehört. Die zeichen-analoge triadische Relation der Zahl geht damit über in

ZaR = (Za(kard), Za(kard); Z(rel)).

2. Bense setzt hier voraus, dass der Zählprozess mit den Kardinalzahlen beginnt. Dagegen hatte schon 1932 der Mathematiker Baer bemerkt: : „Vom Zählen aus gesehen erscheint übrigens der Ordinalzahlbegriff als der Primäre; wir zählen ja zunächst: erstens, zweitens, ... siebentens, und erst ein Abstimmungsprozess führt dazu zu sagen: dieser Bereich enthält sieben Dinge" (1932, S. 115). Und genauso ist auch das Vorgehen in der Mengentheorie (vgl. z.B. Ebbinghaus 1994, S. 97 ff., 138 ff.), wo die Kardinalzahlen einfach als Äqivalenzklassen von Ordinal-zahlen bestimmt werden.

3. Vom semiotischen Standpunkt aus muss jedoch festgehalten werden, dass die Menge der Ordinalzahlen {1., 2., 3., ..., n.} gegenüber der Menge der Kardina-zahlen {1, 2, 3, ..., n} das Element der ordinalen Fixierung voraus hat, weshalb sie auf der Ebene der Repertoires als Sinzeichen (1.2) fungieren, während die Kardinalzahlen als Qualizeichen fungieren (1.1). So kommt also Bense zu folgendem Stufenbild der drei „zeichenanalogen" Zahlensysteme:

Kardinalzahl	$\subset$	Ordinalzahl	$\subset$	Relationenzahl
Za(.1.)	<	Za(.2.)	<	Za(.3.)

4. Man sollte jedoch nicht vergessen, dass nicht nur der semiotische zahlentheoretische Zugang für die Primordialität der Kardinalität spricht, sondern auch das von Wiener (1914) entdeckte Gesetz, dass geordnete Mengen durch ungeordnete Mengen definiert werden können, deren Elemente wiederum ungeordnete Mengen sind:

(a, b) = {{a}, {a, b}}.

Dieses Gesetz hatte ich schon in meiner „Mathematischen Semiotik“ (2006, 2. Aufl. 2008, S. 15) benutzt, um die Peirce-Bensesche Primzeichen-Relation zu definieren

ZR = {Ø, { Ø}, {{ Ø}}} .

Allgemein erhält man (Wiener, Kuratowski):

$$
\begin{aligned}
&0 := \emptyset \\
&1 := \{0\} = \{\emptyset\} \\
&2 := \{0,1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\
&3 := \{0,1,2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \\
&4 := \{0,1,2,3\} \\
&\ldots \\
&n+1 := n \cup \{n\}
\end{aligned}
$$

D.h. Ordinalität kann allein durch Kardinlität definiert werden.

5. An dieser Stelle möchte ich als Parallele und Exkurs auf eine kürzlich erschienene Arbeit (Toth 2010) verweisen, in der ich den Versuch gemacht hatte, die Entstehung der Primzeichen aus den von Kaehr (2008) eingeführten Kontexturalzahlen zu bestimmen. Da die Semiose vom Objekt über disponible Relationen (vgl. Bense 1975, S. 65 f.) zum Zeichen führt, d.h. jedes Tripel

Σ = <Ω, DR, ZR>

erfüllt, kann man den Objekten die Kontexturalzahl 1

$\Omega \rightarrow$ K = 1,

den von ihnen auf die DR abgebildeten Präzeichen die Kontexturalzahl 2

$(\Omega \rightarrow DR) \rightarrow (K = 1) \rightarrow (K = 2)$

und den von ihnen auf die ZR abgebildeten Zeichen die Kontexturalzahl 3 zuordnen

$(\Omega \rightarrow DR \rightarrow ZR) \rightarrow (K = 1) \rightarrow ((K = 2) \rightarrow (K = 3))$.

Die Abbildung der Kontexturalzahlen

$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$

besitzt also genau die gleiche Ordnung wie die Primzeichen

$1 \subset 2 \subset 3$,

so dass also 1 in 2 und 1 und 2 in 3 enthalten sind.

6. Wenn wir die Ergebnisse der Kapitel 1-4 und des Exkurses 5 zusammennehmen, können wir sie im folgenden Bild skizzieren, in dem in der 1. Reihe die Elemente des semiotischen Tripels, in der 2. Reihe die Abbildung der Kontexturen auf die Fundamentalkategorien (bzw. Primzeichen) und in der 3. die „zeichenanalogen" Zahlensysteme stehen:

OR_1	$(K = 1) \rightarrow M$	Za(kard)
$DR_{1,2}$	$(K = 1 \rightarrow K = 2) \rightarrow M \rightarrow O$	Za(ord)
$ZR_{1,2,3}$	$((K = 1 \rightarrow K = 2) \rightarrow K = 3) \rightarrow (M \rightarrow O) \rightarrow I$	Za(rel)

Von hier aus ergibt sich aber im Hinblick auf die den zeichenanalogen Zahlensystemen zuzuordnenden Zahlenwissenschaften ein interessantes Ergebnis: Offenbar ist Za(kard) die Charakteristik der reinen Mathematik, die mit bedeutungs- und sinnfreien Tokens rechnet, wo man, nach einem bekannten

Bonmot von Bernays, ja auch anstatt Zahlen Bierseidel nehmen könne. Völlig ausser Zweifel steht, dass Za(rel) die Charakteristik der Semiotik ist, wo sowohl mit Bedeutung als auch mit Sinn gerechnet wird. Es bleibt damit die Bestimmung von Za(ord), und da die dritte der drei Zahlenwissenschaften die Logik ist, darf man versuchen, sie durch Za(ord) zu charakerisieren. Dafür spricht nicht nur die bekannte Tatsache, dass die moderne Logik mit Hilfe der Mengenlehre formalisierbar ist, was bekanntlich so weit geht, dass zwischen beiden Disziplinen praktisch kein Unterschied mehr besteht (Ebbinghaus 1994), sondern auch, dass die Logik im Gegensatz zur Mathematik neben den Zeichentokens $M \in \{M_I\}$ auch die Objektbezüge benötigt, um die Wahrheit all derjenigen Aussagen zu bestimmen, die nicht-trivial, d.h. nicht logisch notwendig ist. Da die Logik mit zwei Basiswerten arbeitet, 0 und 1, setzt sie zur Bestimmung ihrer Wahrheitswert-funktionentabellen die Abbildungen zwischen 0 und 1 voraus, d.h. ein ganz spezififsches Ordnungsschema. So ist etwa die Zahlenfolge 1000 nicht einfach = 1000, sondern rekurriert auf den Objektbezug „Konjunktion“, während die Zahlenfolge 1110 nicht einfach = 1110 ist, sondern auf den Objektbezug „Dis-junktion" referiert. Etnsprechend kann man aus den zwei Kardinalzahlen 0 und 1 (oder irgendwelchen) durch Wertbelegung die logischen Werte erzeugen und somit die Logik aus der Mathematik ableiten, aber das Umgekehrte, die Ableitung der Peano-Zahlen aus zwei logischen Werte 0 und 1, ist natürlich ganz ausge-schlossen und damit auch die Ableitung der Mathematik aus der Logik. Hingegen dürfte es möglich sein, sowohl die Mathematik als auch die Logik aus der Semiotik abzuleiten, da die Relationalzahlen die Obermengen der Kardinal- und Ordinal-zahlen bilden. Man darf sich kaum vorstellen, wieviel Arbeit auf diesem Gebiet noch zu tun verbleibt.

Bibliographie

Baer, Reinhold, Hegel und die Mathematik. I: Verhandlungen des Zweitens Hegelkongresses 1931 in Berlin, ed. B. Wigersma. Berlin 1932, S. 104-120

Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1975

Ebbinghaus, Heinz-Dieter, Einführung in die Mengenlehre. 3. Aufl. Mannheim 1994

Kaehr, Rudolf, Sketch on semiotics in diamonds. http://www.thinkartlab.com/pkl/lola/Semiotics-in-Diamonds/Semiotics-in-Diamonds.html (2008)

Toth, Alfred, Grundlegung einer mathematischen Semiotik. 2. Aufl. Klagenfurt 2008

Toth, Alfred, Die Entstehung der Peirce-Zahlen. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, http://www.mathematical-semiotics.com/pdf/Entst.%20Peirce-Zahlen.pdf (2010)

Wiener, Norbert, A simplification of the logic of relations. In: Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 17, 914, S. 387-390

13.6.2010