Prof. Dr. Alfred Toth

Semiotische Limeszahlen

1. Eine Menge m aller (kleineren) Ordinalzahlen hat entweder ein grösstes Element k, dann gilt zwangsläufig $n = k+$, und n heisst Nachfolgerzahl. Oder m hat kein grösstes Element, in diesem Fall gilt $n = \cup m$ (Erné 1982, S. 274). Die letztere Zahl wird Limeszahl genannt.

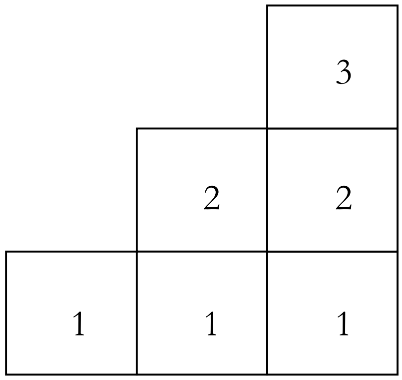
Bei Peirce ist es nun so, dass er, ohne allerdings eine entsprechende Grenzzahl einzuführen, ganz offenbar die Drittheit seiner Zeichenrelation als „Grenz-relation" im Sinne hatte: „Und die Analyse wird zeigen, dass jede Relation, die tetradisch, pentadisch oder von irgendeiner höheren Anzahl von Korrelaten ist, nichts anderes als eine Zusammensetzung von triadischen Relationen ist. Es ist daher nicht überraschend, wenn man findet, dass ausser den drei Elementen der Erstheit, Zweitheit und Drittheit nichts anderes im Phänomen zu finden ist' (1.347)" (Walther 1989, S. 298). Wie bereits in Toth (2007, S. 178 ff.) angedeutet, werde ich diesem Aufsatz zeigen, dass die Behauptung von Peirce – und auch diejenige in seinem Anschluss von Marty (1980) falsch ist.

In diesem Zusammenhang möchte ich, nicht nur der Vollständigkeit halber, auch noch auf eine in der Semiotik konsequent übersehene Feststellung Gotthard Günthers in Bezug auf Peirce Triadismus aufmerksam machen: „Höchst wesentlich aber war für Peirce seine Weigerung, über die Triadenlogik hinauszugehen. Zwar hatte er mit dem Vf. [G.G.] das gemeinsam, dass beide von der Voraussetzung ausgehen, dass die zweiwertige Logik der Dualitäten nicht ausreichend sei, unsere rationalen Bedürfnisse zu befrieden, aber Peirce schneidet sich weitere Erwägungen dann selbst mit der bündigen Feststellung ab: ‚Triadic logic is universally true' (...). Die klassische Logik lässt nach Peirce noch ein Unsicherheitsmoment zu, welches dann im Triadischen beseitigt wird. Die Analogie zur göttlichen Trinität und der Allweisheit eines absoluten Bewusstseins ist unverkennbar" (Günther 1978, S. vii f.).

2. Nach Bense (1979, S. 53, 67) ist das Peircesche Zeichen definiert als eine triadische Relation über einer monadischen, einer dyadischen und einer triadischen Relation:

$$Z = {}^{3}R({}^{1}R, {}^{2}R, {}^{3}R) = R(M, O, I) = ((M), ((M \rightarrow O), O \rightarrow I)).$$

Man kann diesen Sachverhalt sehr gut in einem Treppenmodell darstellen:



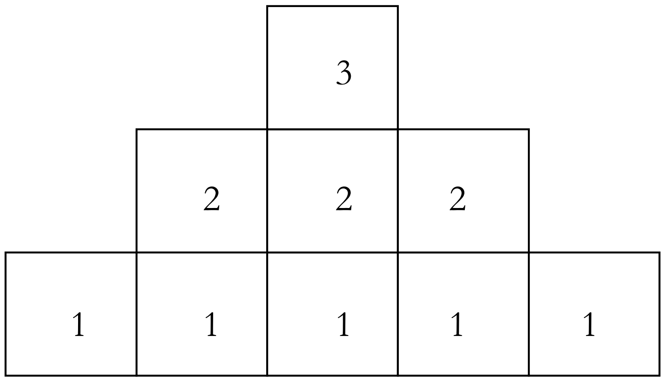
Jede Kategorie funktioniert zwar insofern unabhängig, als keine höhere direkt über ihr liegt, andererseits ist sie aber auch mengeninklusiv in alle kleineren Kategorien eingebettet, d.h. es gilt $1 \subset 2 \subset 3$, wobei $(2 \subset 3)$ näher bei 3 liegt als (1) bzw. $(1 \subset 2)$. Schaut man nun den Bau einer Zeichenklasse an, wozu man die Unterscheidung triadischer und trichotomischer Peirce-Zahlen in Toth (2009a) vergleiche,

$$\text{Zkl} = \quad (3. \left\{\begin{matrix} .3 \\ .2 \\ .1 \end{matrix}\right\} 2. \left\{\begin{matrix} .3 \\ .2 \\ .1 \end{matrix}\right\} 1. \left\{\begin{matrix} .3 \\ .2 \\ .1 \end{matrix}\right\})$$

und vergleicht sie mit dem Bau ihrer zugehörigen dualen Realitätsthematik

$$\text{Rth} = \quad (1. \left\{\begin{matrix} .1 \\ .2 \\ .3 \end{matrix}\right\} 2. \left\{\begin{matrix} .1 \\ .2 \\ .3 \end{matrix}\right\} 3. \left\{\begin{matrix} .1 \\ .2 \\ .3 \end{matrix}\right\})$$

dann erkennt man, dass die Trichotomien oder Stellenwerte der Zeichenklassen nichts anderes sind als die Triaden oder Hauptwerte der Realitätsthematiken, weshalb man zur vollständigen Behandlung nicht nur der triadischen, sondern auch der trichotomischen Peirce-Zahlen das obige Treppenmodell zur folgenden Doppeltreppe spiegeln muss:



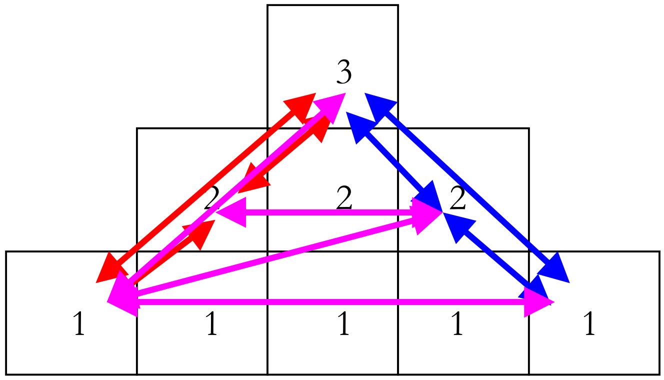
3. Für die von Bense ausdrücklich als „ordinale" Primzeichen – in Analogie zu Primzahlen gebildet – eingeführten Fundamentalkategorien (vgl. Bense 1981, S. 17 ff.) gelten nun die meisten der für gewöhnliche Ordinalzahlen gültigen Operationen nicht – und zwar im Widerspruch zum „Nachweis" Benses, dass die Nachfolgerelation der Primzeichen isomorph ist zur Nachfolgerelation der natürlichen Zahlen (Bense 1975, S. 167 ff., 1983, S. 192 ff.), vgl. Toth (2009b). So haben wir z.B. bei den triadischen (links) und bei den trichotomischen (rechts) Peirce-Zeichen

$(1.) + (1.) \neq (2.)$	$(1.) + (1.) \neq (2.)$
$(1.) + (1.) + (1.) \neq (3.)$	$(1.) + (1.) + (1.) \neq (3.)$
$(1.) + (2.) \neq (3.)$	$(1.) + (2.) \neq (3.)$
$(2.) + (1.) \neq (3.)$	$(2.) + (1.) \neq (3.)$

Umgekehrt kann man aber mit Hilfe der ordinalen Peirce-Zahlen Operationen durchführen, für die es in der üblichen Ordinalzahlarithmetik keine Parallelen gibt, vgl. etwa die bereits bei Walther (1979, S. 76 u. 120) gezeigten verschiedenen Typen von Superisationen, vgl. dazu ausführlich meine „Allgemeine Zeichengrammatik" (Toth 2008). So gibt es z.B. die folgenden Basis-Superisationstypen

$(1.) \equiv (2.)$		$(.1) \equiv (.2)$	
$(1.) \equiv (3.)$	$(2.) \equiv (3.)$	$(.1) \equiv (.3)$	$(.2) \equiv (3.)$,

sowie Kombinationen zwischen triadischen und trichotomischen Peirce-Zahlen. Man kann die angeführten Superisationsoperationen wie folgt mit dem Treppenmodell darstellen:



(1.) ≡ (2.)
(1.) ≡ (3.)   (2.) ≡ (3.)

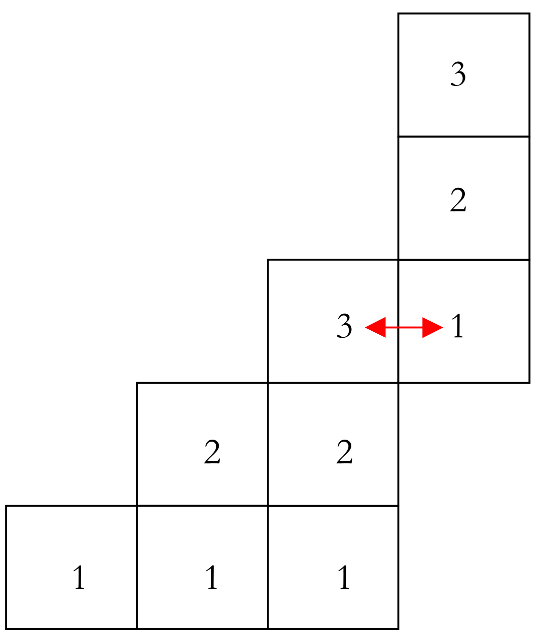
rot eingezeichnet

(.1) ≡ (.2)
(.1) ≡ (.3)   (.2) ≡ (3.)

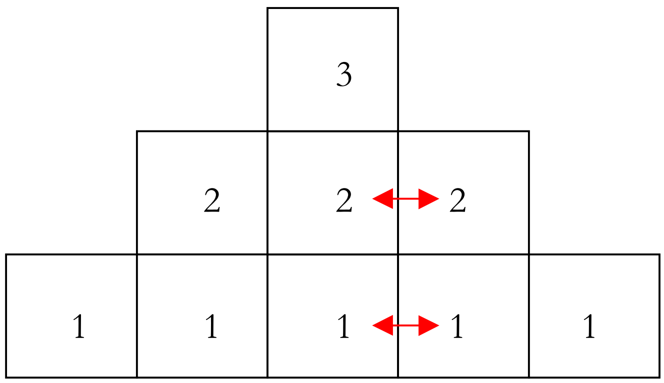
blau eingezeichnet

lila eingezeichnet

Gilt also etwa in einer Zeichenverbindung I1 ≡ M2, kann man dies wie folgt darstellen:

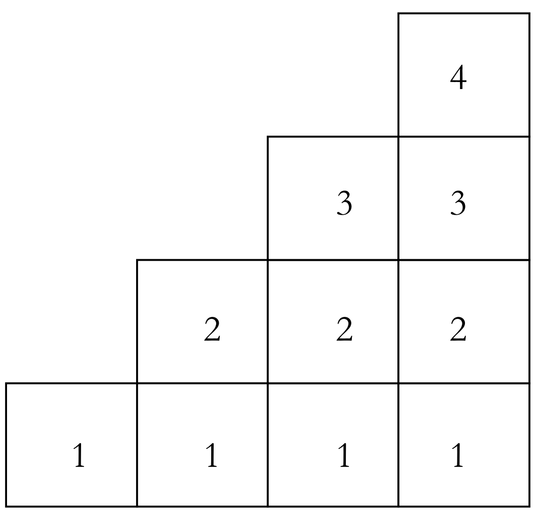


In komplexeren Fällen, wie etwa den von Bense (1975, S. 79) selbst auf andere Weise dargestellten Verknüpfungen (O1 ≡ O2) ∧ (M1 ≡ M2) sieht das im ökonomischten Fall wie folgt aus:



(Wie viele Darstellungsmöglichkeiten gibt es total? Welche Rolle spielt die Zeichen-Dimension bei der Ökonomie der Darstellung?)

4.1. Nun kann man sich natürlich, rein theoretisch wenigstens, ohne Probleme ein Gebilde wie das folgende, analog zu den „gewöhnlichen" Ordinalzahlen gebildete, vorstellen:



also das Inklusionsschema einer tetradischen Zeichenrelation. Ein solches Schema wurde bisher deshalb nicht konstruiert, weil man dem Peirceschen „Beweis" glaubte, jede n-adische Relation mit n > 3 können aus triadischen, dyadischen und monadischen Relationen zusammengesetzt werden. Das funktioniert zwar, wenn man von den semiotischen Funktionen dieser n≤3-

stelligen Relationen absieht, d..h. aber die Relationen als reine Mittelbezüge behandelt, allerdings wurden diese aber ja gerade wegen dieser Funktionen eingeführt, die in der Semiotik mit Bezeichnungs-, Bedeutungs- und Gebrauchsfunktion bezeichnet werden (vgl. Walther 1979, S. 113 ff.). Nur schon die in Toth (2009c) eingeführte tetradische erweiterte Peircesche Zeichenrelation

$ZR+ = (M, O, I, \varnothing)$,

deren eingebettetes Nullzeichen zwangslos aus der Bildung der Potenzmenge über der Peirceschen Menge der Fundamentalkategorien {M, O, I} folgt, sollte eigentlich zu denken geben, denn ∅ ist eine 0-stellige Relation und keine 4-stellige. Wie also sollte man ZR+ als Konkatenation von Triaden, Dyaden und Monaden darstellen können?

4.2. Es gibt aber noch wesentlich wichtigere Gründe, warum eine Dekomposition n-adischer Relation mit $n > 3$ nicht möglich ist, denn wie in Toth (2007, S. 178 ff.) gezeigt worden war, weisen höhere als triadische Relationen in ihren thematisierten Realitäten Strukturen auf, welche in niedrigeren Relation entweder gar nicht oder erst marginal auftreten. Um einen detaillierten Einblick zu ermöglichen, bringe ich hier die zusammenfassenden Klassifikation der strukturellen thematisierten Realitäten für 3-adische, 4-adische, 5-adische und 6-adische Semiotiken:

4.3. Für die **triadische Semiotik** können wir damit folgende Ergebnisse und Probleme festhalten:

1. Thematisationsrichtung:

   X^mY^n mit $X \in \{1, 2, 3\}$, wobei $X = Y$ erlaubt und $m, n \in \{1, 2\}$ mit $X^m \rightarrow Y^n$, falls $m > n$ bzw. $X^m \leftarrow Y^n$, falls $m < n$. (Der Fall $m = n$ tritt nicht auf.)

2. Mehrdeutige Thematisationen und Thematisationsrichtungen gibt es bei den HZkln×HRthn 1, 7 und 10. Bei 1 und 10 könnte man aus strukturellen Gründen Links- bzw. Rechtsthematisation stipulieren; dies ist jedoch bei 7 nicht möglich. Also gibt es keine einheitlichen Thematisationsrichtungen bei den homogenen Thematisationen, d.h. bei den HZkln×HRthn.

3. Triadische Realität gibt es nur bei der (eigenrealen) Determinanten:

5. 3.1 2.2 1.3 × $\underline{3.1 \quad 2.2}$ 1.3 $\quad 3^1 2^1 \rightarrow 1^1$
$\underline{3.1}$ 2.2 $\underline{1.3}$ $\quad 3^1 \rightarrow 2^1 \leftarrow 1^1$
3.1 $\underline{2.2 \quad 1.3}$ $\quad 3^1 \leftarrow 2^1 1^1$

4. Einzig bei der triadischen Realität tritt ein von allen übrigen strukturellen Realitäten abweichender Thematisationstyp auf, den ich "Sandwich-Thematisation" nennen möchte:

$\underline{3.1}$ 2.2 $\underline{1.3}$ $\quad 3^1 \rightarrow 2^1 \leftarrow 1^1$

4.4. Für die **tetradische Semiotik** können wir folgende Ergebnisse und Probleme festhalten:

1. Bei den triadischen Thematisationen treten erstmals solche vom Typ $X^m Y^m \leftarrow Z^{2m}$ bzw $Z^{2m} \rightarrow X^m Y^m$ auf. Hier wurde die Thematisationsrichtung gemäss der grössten Frequenz einer einzelnen Kategorie festgelegt.

2. Während die Sandwiches der dyadischen Thematisationen vom Typ $X^m \leftrightarrow Y^m$ sind, sind diejenigen der triadischen Thematisationen vom Typ $X^m \leftarrow Y^{2m} \rightarrow Z^m$. Da man sich auch eine (in der pentadischen Semiotik tatsächlich auftretende) Struktur $X^m \rightarrow Y^{2m} \leftarrow Z^m$ denken kann, nannten wir die erste zentrifugal und nennen wir die zweite zentripetal.

3. Tetradische Realität gibt es nur bei der (eigenrealen) Determinanten. Rein theoretisch sind folgende 10 Thematisationstypen möglich:

15 3.0 2.1 1.2 0.3 × $\underline{3.0\ 2.1\ 1.2}$ 0.3 $\quad 3^1 2^1 1^1 \rightarrow 0^1$
$\underline{3.0\ 2.1}$ 1.2 0.3 $\quad 3^1 2^1 \rightarrow 1^1 0^1$
$\underline{3.0}$ 2.1 1.2 0.3 $\quad 3^1 \rightarrow 2^1 1^1 0^1$
3.0 $\underline{2.1\ 1.2\ 0.3}$ $\quad 3^1 \leftarrow 2^1 1^1 0^1$
3.0 2.1 $\underline{1.2\ 0.3}$ $\quad 3^1 2^1 \leftarrow 1^1 0^1$
3.0 2.1 1.2 $\underline{0.3}$ $\quad 3^1 2^1 1^1 \leftarrow 0^1$
$\underline{3.0}$ 2.1 1.2 $\underline{0.3}$ $\quad 3^1 \rightarrow 2^1 1^1 \leftarrow 0^1$
3.0 $\underline{2.1\ 1.2}$ 0.3 $\quad 3^1 \leftarrow 2^1 1^1 \rightarrow 0^1$
3.0 $\underline{2.1}$ 1.2 0.3 $\quad 3^1 \leftarrow 2^1 \rightarrow 1^1 0^1$

$3.0\,2.1\,\underline{1.2}\,0.3 \quad 3^1 2^1 \leftarrow 1^1 \rightarrow 0^1$

Man könnte die Regel aufstellen: $X^m Y^m Z^m \rightarrow A^m$ wegen 3m > m. Dann würden die Typen $3^1 \rightarrow 2^1 1^1 0^1$ und $3^1 2^1 1^1 \leftarrow 0^1$ als regelwidrig entfallen. Unklar bleiben dann aber immer noch $3^1 2^1 \rightarrow 1^1 0^1$ und $3^1 2^1 \leftarrow 1^1 0^1$. Von den vier Sandwiches sind die beiden letzten rechts- bzw. linksmehrfach.

4.5. Für die **pentadische Semiotik** können wir folgende Ergebnisse und Probleme festhalten:

1. Neben dyadischen und triadischen treten erwartungsgemäss nun tetradische Thematisationstypen auf.

2. Bei den triadischen Thematisationen tauchen Typen der Form $X^m Y^m \leftarrow Z^n$ bzw. $Z^n \rightarrow X^m Y^m$ mit $n \leq 3$ auf. An Sandwich-Thematisationen erscheinen nun zentrifugale der Form $X^m \leftarrow Y^n \rightarrow Z^m$ neben zentripetalen der Form $X^m \rightarrow Y^n \leftarrow Z^m$.

3. Bei den tetradischen Thematisationen treten Typen der Form $X^m Y^m Z^m \leftarrow A^n$ bzw. $A^n \rightarrow X^m Y^m Z^m$ auf. Als neuer Typ von Sandwich-Thematisationen erscheinen linksmehrfache Sandwiches der Form $X^m Y^m \leftarrow A^n \rightarrow Z^m$ sowie rechtsmehrfache der Form $X^m \leftarrow A^n \rightarrow Y^m Z^m$, die bereits in der tetradischen Realität der Tetratomischen Tetraden erstmals auftauchten.

4. Pentadische Realität gibt es nur bei der (eigenrealen) Determinanten.

5. Als wichtigstes Resultat ergibt sich jedoch, dass die zu erwartenden Pentatomischen Pentaden (dyadischer, triadischer und tetradischer Thematisation) nicht konstruierbar sind, da die Regel zur Bildung Trichotomischer Triaden, die noch bei den Tetratomischen Tetraden Anwendung fand, hier offenbar nicht mehr anwendbar ist, da von den zahlreichen neu auftretenden Sandwiches nicht klar ist, ob und wie sie in die Pentatomischen Pentaden integriert sind.

4.6. Für die **hexadische Semiotik** können wir schliessich folgende Ergebnisse und Probleme festhalten:

1. Erwartungsgemäss treten dyadischen, triadischen und tetradischen nun auch pentadische Thematisationstypen auf.

2. Bei den dyadischen Thematisationen treten Sandwiches unklarer Thematisationsrichtung der Form $X^m \leftrightarrow Y^m$ auf.

3. Bei den triadischen Thematisationen sind die Thematisationsrichtungen im Grunde unklar. Versuchsweise könnten drei Gruppen gebildet werden: 1. Solche, deren linke Kategorie die Gestalt X^1 hat. 2. Solche, deren rechte Kategorie die Gestalt X^1 hat. 3. Solche, deren mittlere Kategorie die Gestalt X^1 hat, die aber weder zu 1. noch zu 2. gehören (Sandwiches). Ausdifferenzierungen und andere Gruppierungen sind aber möglich. Die triadischen Sandwiches der Form $X^m \leftrightarrow Y^n \leftrightarrow Z^m$ weisen, wie schon die dyadischen, unklare Thematisationsrichtung auf.

4. Für die tetradischen Thematisationen gilt das zu den triadischen Gesagte. Auch die tetradischen Sandwiches der Form $A^m \leftrightarrow X^n Y^n \leftrightarrow B^m$ weisen, wie bereits die dyadischen und die triadischen, unklare Thematisationsrichtung auf.

5. Für die pentadischen Thematisationen gilt das zu den tetradischen Gesagte.

6. Hexadische Realität gibt es nur bei der (eigenrealen) Determinanten.

7. Für die zu erwartenenden Hexatomischen Hexaden gilt das zu den Pentatomischen Pentaden Gesagte, nur dass hier noch mehr Verwirrung herrscht.

5. Man kann nun natürlich fortfahren und mühsam die Strukturen 7-, 8-, 9-; 10-, 11-, 12-; 13-, 14-, 15; ... –adischer Semiotiken ausrechnen und wird finden, dass immer neue Strukturen auftreten, die in unteren Strukturen fehlen, so dass also von einer Dekomposition von n>3-adischen Relationen in Triaden, Dyaden und Monaden keine Rede sein kann. Dabei tritt ein solcher Strukturverlust ein, dass z.B. Eigenrealität isoliert unverständlich ist, speziell als Sonderfall triadischer, tetradischer, ... Realität. Niedrigere Strukturen benötigen also Erhellung durch höhere, dessen Fragmente sie sind, ebenso wie höhere Sturkturen niedrigere brauchen, aus denen sie sich, deren übergeordnete Mengen sie sind, gewissermassen verselbständigen. Trotzdem scheint, wie man gesehen hat, der semiotische Dreischritt mit einer semiotischen Limeszahl

abzuschliessen, denn die Triade, Trichotomie und trichotomische Triade sind die Grundbegriffe der Semiotik. Hiervon rührt auch die Idee, höhere Relationen könnten auf Triaden abgebildet werden. In Wahrheit ist die Semiotik ein hierarchisches System von Dreischritten mit den Limszahlen 3, 6, 9, ..., die jedesmal qualitative "Sprünge" (vgl. Kronthaler 1986, S. 93 ff.; Erné 1982, S. 263 denkt offenbar an "Würfe") INNERHALB eines semiotischen Zahlensystems haben und nicht ZWISCHEN Zahlensystemen wie das in der transfiniten Arithmetik der Fall ist. Auch in diesem Punkt zeigt also bereits die klassische Peircesche Semiotik klar polykontexturale Züge (vgl. Kronthaler 1986, S. 93).

Bibliographie

Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1975

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Bense, Max, Axiomatik und Semiotik. Baden-Baden 1981

Bense, Max, Das Universum der Zeichen. Baden-Baden 1983

Erné, Marcel, Einführung in die Ordnungstheorie. Mannheim 1982

Marty, Robert, Sur la réduction triadique. In: Semiosis 17/18, 1980, S. 5-9

Günther, Gotthard, Grundzüge einer neuen Theorie des Denkens in Hegels Logik. 2. Aufl. Hamburg 1978

Kronthaler, Engelbert, Grundlegung einer Mathematik der Qualitäten. Frankfurt am Main 1986

Toth, Alfred, Zwischen den Kontexturen. Klagenfurt 2007

Toth, Alfred, Entwurf einer allgemeinen Zeichengrammatik. Klagenfurt 2008

Toth, Alfred, Die Semiotik und die natürlichen Zahlen. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics (erscheint, 2009a)

Toth, Alfred, Triadische und trichotomische Peirce-Zahlen und Vermittlungszahlen. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics (erscheint, 2009b)

In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics,

Toth, Alfred, Das Nullzeichen. http://www.mathematical-semiotics.com/pdf/Nullzeichen.pdf (2009c)

Walther, Elisabeth, Allgemeine Zeichenlehre. 2. Aufl. Stuttgart 1978

Walther, Elisabeth, Charles Sanders Peirce – Leben und Werk. Baden-Baden 1989

1.11.2009