Prof. Dr. Alfred Toth

Übersicht über semiotische n-Kategorien

1. Gemäss einem dem Mathematiker Dan Freed zugeschriebenen Witz ist die n-Kategorien-Zahl die grösste Zahl n, die ein Mathematiker eine halbe Stunde lang mit Denken an n-Kategorien zubringen kann, ohne Kopfschmerzen zu bekommen (Baez 2007). In Toth (2009a, b) hatten wir bereits einige Studien zu semiotischen 2- und Bikategorien vorgelegt:

Wenn man, statt von Subzeichen auszugehen, die Primzeichen (.1.), (.2.), (.3.) als Objekte semiotischer Kategorien und die Abbildungen zwischen ihn als Morphismen definiert:

$(.1.) \rightarrow (.2.) \equiv \alpha$
$(.2.) \rightarrow (.3.) \equiv \beta,$

dann haben die Konversen

$(.2.) \rightarrow (.1.) \equiv \alpha°$
$(.3.) \rightarrow (.2.) \equiv \beta°,$

und die Komponierten

$(.1.) \rightarrow (.3.) \equiv \beta\alpha$

$(.3.) \rightarrow (.1.) \equiv \alpha°\beta°.$

2. Die Abbildungen zwischen Subzeichen, die in der bisherigen semiotischen Kategorietheorie als Objekte genommen wurden (vgl. Toth 1997, S. 21 ff.), sind dann als 2-Morphismen zu bestimmen, wobei jedes Subzeichen sich als „Portemanteau"-2-Morphismus erweist und 4 Möglichkeiten der Abbildung hat:

1. $(.A \rightarrow .B)$
2. $(.A \rightarrow B.)$
3. $(A. \rightarrow .B)$
4. $(A. \rightarrow B.)$

Wenn wir dezimale Indizes (00, 01, 10 und 11) benutzen, um zu unterscheiden, ob triadische Primzeichen auf triadische, auf trichotomische abgebildet werden, oder ob „gemischt“ abgebildet wird, bekommen wir (Toth 2009b):

1. $(.A \rightarrow .B) \equiv \zeta_{00}$
2. $(.A \rightarrow B.) \equiv \zeta_{01}$
3. $(A. \rightarrow .B) \equiv \zeta_{10}$
4. $(A. \rightarrow B.) \equiv \zeta_{11}$

Damit haben wir für die basalen Morphismen

$$[(.1.) \rightarrow (.2.) \equiv \alpha] = \{\alpha_{00}, \alpha_{01}, \alpha_{10}, \alpha_{11}\}$$
$$[.2.) \rightarrow (.3.) \equiv \beta] = \{\beta_{00}, \beta_{01}, \beta_{10}, \beta_{11}\},$$

für ihre Konversen

$$[(.2.) \rightarrow (.1.) \equiv \alpha°] = \{\alpha_{00}°, \alpha_{01}°, \alpha_{10}°, \alpha_{11}°\}$$
$$[(.3.) \rightarrow (.2.) \equiv \beta°] = \{\beta_{00}°, \beta_{01}°, \beta_{10}°, \beta_{11}°\},$$

sowie für die Komponierten

$$\begin{aligned}[(.1.) \rightarrow (.3.) \equiv \beta\alpha] = \{&\beta_{00}°\alpha_{00}°, \beta_{00}°\alpha_{01}°, \beta_{00}°\alpha_{10}°, \beta_{00}°\alpha_{11}°,\\ &\beta_{01}°\alpha_{00}°, \beta_{01}°\alpha_{01}°, \beta_{01}°\alpha_{10}°, \beta_{01}°\alpha_{11}°,\\ &\beta_{10}°\alpha_{00}°, \beta_{10}°\alpha_{01}°, \beta_{10}°\alpha_{10}°, \beta_{10}°\alpha_{11}°,.\\ &\beta_{11}°\alpha_{00}°, \beta_{11}°\alpha_{01}°, \beta_{11}°\alpha_{10}°, \beta_{11}°\alpha_{11}°\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[(.3.) \rightarrow (.1.) \equiv \alpha°\beta°] = \{&\beta_{00}°\alpha_{00}°, \beta_{01}°\alpha_{00}°, \beta_{10}°\alpha_{00}°, \beta_{11}°\alpha_{00}°,\\ &\beta_{00}°\alpha_{01}°, \beta_{01}°\alpha_{01}°, \beta_{10}°\alpha_{01}°, \beta_{11}°\alpha_{01}°,\\ &\beta_{00}°\alpha_{10}°, \beta_{01}°\alpha_{10}°, \beta_{10}°\alpha_{10}°, \beta_{11}°\alpha_{10}°,.\\ &\beta_{00}°\alpha_{10}°, \beta_{01}°\alpha_{11}°, \beta_{10}°\alpha_{11}°, \beta_{11}°\alpha_{11}°\}\end{aligned}$$

3. Neben den 1-Morphismen α und β mit den Primzeichen als Objekten für semiotische 1-Kategorien haben wir also bereits die 2-Morphismen A und B mit den Subzeichen als Objekten für semiotische 2-Kategorien bekommen. So können wir, soweit es semiotisch sinnvoll ist, aufsteigen (und dabei unsere eigene n-Kategorien-Zahl prüfen). Da die grössten bisher als sinnvoll herausgestellten semiotischen Objekte die Trichotomischen Triaden sind (vgl. Toth

1997), können wir die semiotischen Kategorien in der folgenden Tabelle darstellen:

Cat_{Sem1}: $\Omega = \{.1., .2., .3.\}$
$\mathcal{F} = \{\alpha, \beta\}$

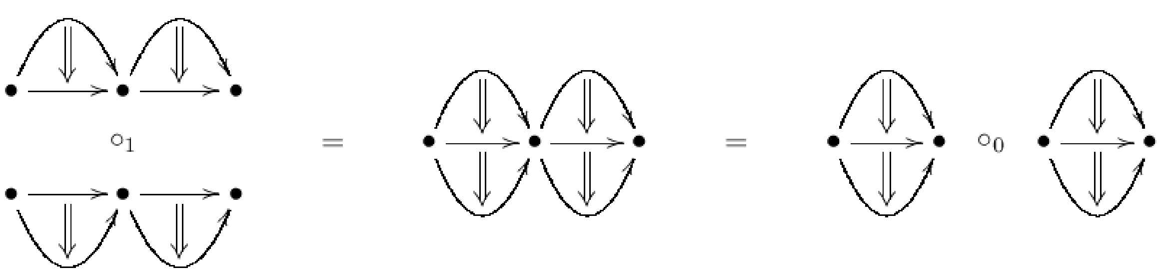
Cat_{Sem2}: $\Omega = \{(1.1), (1.2), (1.3), ..., (3.3)\}$
$\mathcal{F} = \{A, B\}$

Cat_{Sem3}: $\Omega = \{((1.1)\ (1.1)), ((1.1)\ (1.2)), ((1.1)\ (1.3)), ..., ((3.3)\ (3.3))\}$
$\mathcal{F} = \{\underline{A}, \underline{B}\}$

Cat_{Sem4}: $\Omega = \{(3.1\ 2.1\ 1.1), (3.1\ 2.1\ 1.2), (3.1\ 2.1\ 1.3), ..., (3.3\ 2.3\ 1.3)\}$
$\mathcal{F} = \{\underline{\underline{\underline{A}}}, \underline{\underline{\underline{B}}}\}$

Cat_{Sem5}: $\Omega = \{\{(3.1\ 2.1\ 1.1), (3.1\ 2.1\ 1.2), (3.1\ 2.1\ 1.3)\}, ...\}$
$\mathcal{F} = \{\underline{A}, \underline{B}\}$ (zur Bildung Trichotomischer Triaden vgl. Toth (2006)

Somit sind die von den Abbildungen von Primzeichen zu Subzeichen abweichenden übrigen Abbildungen höherer semiotischer Kategorien zu untersuchen. Bereits bei 2-Kategorien gibt es bekannt „horizontale“ und „vertikale“ Abbildungen:



(Bild aus: Wikipedia, Lemma „n-Categories“)

In Toth (2009a, b) wurden bereits die bei semiotischen 1-Kategorien nicht aufscheinenden „Portemanteaus“ behandelt, d.h. die Tatsache, dass ein als Prozess (Semiose) aufgefasstes Subzeichen nicht eine, sondern 4 verschiedene Abbildungen hat (s. o.). Eine einfache Rechnung erlaubt es festzustellen, dass wir bereits bei semiotischen 2-Kategorien 4 Abbildungen bei nicht komponierten Morphismen sowie 8 bei den komponierten (d.h. den Subzeichen (3.1) und (1.3)) haben. Bei den 3-Kategorien sind es demnach 16/64, bei den 4-Kategorien $196/64^2$, und bei den 5-Kategorien (Funktoren zwischen Zeichenklassen/Realitätsthematiken und Trichotomischen Triaden) sind es $196^2/64^4$.

Bibliographie

Baez, John, This weeks's finds in Mathematical Physics (Week 255). http://math.ucr.edu/home/baez/week255.html (2007)

Leinster, Tom, Higher Operads, higher Categories. Cambridge, U.K. 2004

Toth, Alfred, Entwurf einer Semiotisch-Relationalen Grammatik. Tübingen 1997

Toth, Alfred, Verdünnung und Poly-Affinität. Zu einer Semiotik des Fragmentarischen. Dortmund 2006. Digitalisat in: http://www.mathematical-semiotics.com/pdf/Sem.%20des%20Fragm..pdf (2006)

Toth, Alfred, Semiotische Kategorien und Bikategorien. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, http://www.mathematical-semiotics.com/pdf/Kat.%20u.%20Bikat..pdf (2009a)

Toth, Alfred, Semiotische Kategorien und Bikategorien II. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, http://www.mathematical-semiotics.com/pdf/Kat.%20und%20Bikat.%20II.pdf (2009b)

23.8.2009