Prof. Dr. Alfred Toth

Semiotik als Theorie gradativer Relationalität

Semiotic Technical Laboratory, Tucson, AZ

Vorwort

Der vorliegende schmale Band versammelt meine Studien zur Semiotik als einer Theorie gradativer Relationalität. Bekanntlich hatte Bense die triadische semiotische Relation als Relation über einer monadischen, einer dyadischen und einer triadischen Teilrelation definiert. Das Zeichen enthält somit nicht nur sich selbst, sondern auch alle seine Teilrelationen und ist damit autoreflexiv. Mengentheoretisch bedeutet dies, daß man sich vom Fundierungsaxiom verabschieden muß. Die bensesche Zeichendefinition hat also weitgehende Konsequenzen für die mathematische Fundierung der Semiotik.

In den folgenden Kapiteln, die chronologisch angeordnet wurden, geht es also um die Frage, was denn überhaupt eine Relation zu einer semiotischen Relation macht und damit um die weiterführende Frage, mit welchem Recht die Semiotik als Spezialfall der allgemeinen Relationentheorie eingeführt werden kann. Wie wir vor allem in den letzten Kapiteln (die viele Jahre nach den ersten geschrieben wurden) zeigen werden, sind es keineswegs die Restriktion auf 3-adische Relationen und die charakteristische trichotomische Inklusion, welche für kartesische Produkte aus Zeichenzahlen gilt, die eine Relation zu einer semiotischen Relation machen, sondern die Gradativität der Teilrelationen einer beliebigen n-adischen Relation. Mit dem Fall des Fundierungsaxiom fallen also auch alle bisher stillschweigend vorausgesetzten (und ad hoc angesetzten) Restriktionen für Zeichenklassen und Realitätsthematiken. Im Schlußkapitel wird gezeigt, daß man auf dieser Basis sogar die Einschränkung auf die rein quantitativen Peanozahlen aufgeben und die qualitativen Proto-, Deutero- und Tritozahlen als Basen für semiotische Zahlen benutzen kann. Eine polykontexturale Semiotik ist dann eine Semiotik, deren kenogrammatische Relationen selbst-einbettend sind. Da die Arbeiten zu diesem riesigen Forschungsgebiet erst angelaufen sind, wollen wir es an dieser Stelle mit diesem Hinweis bewenden lassen.

Tucson, AZ, 4.8.2019 Prof. Dr. Alfred Toth

Die Selbstenthaltung des Zeichens

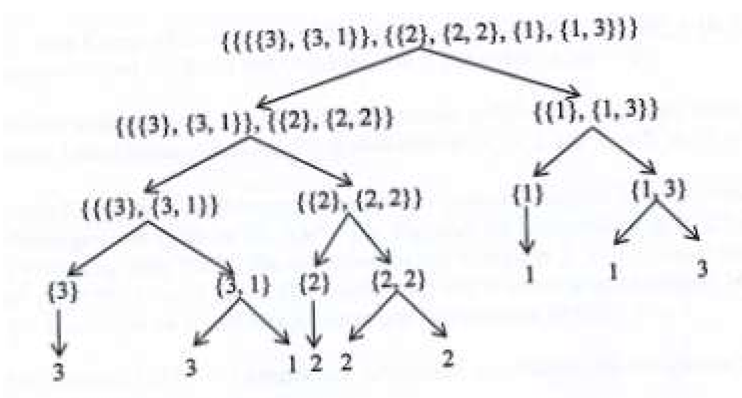
1. Wie Bense (1979, S. 53, 67) eindrücklich gezeigt hatte, ist das Zeichen vom mengentheoretischen Standpunkt aus keine simple „Zusammenfassung von Objekten“, sondern diese Objekte sind wiederum in drei Mengen eingeteilt, die sich alle selbst enthalten:

ZR = {{M}, {{M, O}, {M, O, I}}}.

2. Eine solche Menge aber widerspricht (worauf ich bereits in Toth 2006, S. 17 ff.) hingewiesen hatte, dem Fundierungsaxiom (FA) der Zermelo-Fränkelschen Mengentheorie, denn sie führt zu sogenannten Mirimanoff-Folgen

$\ldots \in x_2 \in x_1 \in x_0$

wodurch es allerdings erstmals möglich ist, Zirkularität in der Semiotik zu beschreiben. Z.B. hat die eigenreale Zeichenklasse ×(3.1 2.2 1.3) = (3.1 2.2 1.3) folgende Ableitung:



Wie man aus der Definition von ZR sieht, taucht ja die triadische Drittheit einmal, die triadische Zweitheit zweimal und die triadische Erstheit dreimal auf. Streng genommen, müsste die Erstheit also 3mal und die Zweitheit 2mal eingeführt werden.

Aus der Definition des Zeichens mit „Anti-Fundierungs-Axiom“ (AFA) folgt ferner natürlich, dass die Vereinigung des Zeichens mit seinem Element die leere Menge ergibt:

ZR ∪ {ZR} = Ø

Demnach enthlt also das Pericesche Zeichen zweimal die leere Menge:

$M \cup \{M\} = \emptyset$ (und zwar zweimal!)

$O \cup \{O\} = \emptyset$

Indem aber der Interpretant selbst eine Drittheit ist, gilt

$I = ZR$

und damit auch

$I \cup \{I\} = \emptyset$.

Wir haben also

$ZR \cup M \cup O \cup U = \{\emptyset \cup \{\{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset, \emptyset\} \cup \{\emptyset, \emptyset, \emptyset\}\}\}\} = \emptyset$.

In Sonderheit bildet also

$M \cup O \cup I = \{\{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset, \emptyset\} \cup \{\emptyset, \emptyset, \emptyset\}\}\}$

eine Mirimanoff-Folge.[1]

Bibliographie

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Toth, Alfred, Grundlegung einer mathematischen Semiotik. Klagenfurt 2006, 2. Aufl. 2008

[1] Von der hier demonstrierten Selbstenthaltung des Zeichens aus kann man sehr einfach die Frage nach der Anzahl der Zeichenklassen über der "verschachtelten" triadischen Relation ZR lösen: {M} enthält genau die 3 Elemente {1.1, 1.2, 1.3}, also den Mittelbezug, {M, O} enthält genau die Kombinationen von $\{1.1, 1.2, 1.3\} \times \{2.1, 2.2, 2.3\}$, also 9 Elemente, und {M, O, I} und damit ZR enthält genau die Kombinationen von $\{1.1, 1.2, 1.3\} \times \{2.1, 2.2, 2.3\} \times \{3.1, 3.2, 3.3\}$, d.h. 27 Zeichenklassen mit der Anzahlrelation $3 \subset 9 \subset 27$. In der Sonderheit folgt aus dem für ZR gültigen AFA, dass es absolut keine (inner-)semiotischen Gründe dafür gibt, der Zeichenform ZR = (3.a 2.b 1.c) eine „Wohlordnung" $a \leq b \leq c$ aufzuoktroyieren, um die Gesamtzahl möglicher Zeichenklassen von 27 auf 10 zu beschränken. Eine solche Limitation ist willkürlich und von AFA aus sogar falsch.

Die Peircesche Zeichenrelation und das Anti-Fundierungsaxiom

1. Ich habe bereits in Toth (2010) darauf hingeweisen, dass die von Bense (1979, S. 53) explizit folgendernmassen definierte verschachtelte Zeichenrelation

ZR = {M, {{M, O}, {M, O, I}}},

d.h. als triadische Relation über einer monadischen, einer dyadischen und einer triadischen Relation, in einer üblichen Mengenlehre wie dem Zermelo-Fränkelschen System wegen Selbstenthaltung zu Paradoxien führt. Da nach der obigen Definition von ZR I = {M, O, I}, sind ja nicht nur (n-1)-adische Relationen in n-adischen enthalten, sondern das Zeichen enthält sich selbst als Objekt, d.h. es gilt nach Aczél (1988, S. 6)

ZR = {ZR},

woraus natürlich folgt

ZR $\cup$ {ZR} = Ø,

und damit ist die Peircesche Semiotik schachmatt gesetzt. (Das ist bislang tatsächlich niemandem aufgefallen!)

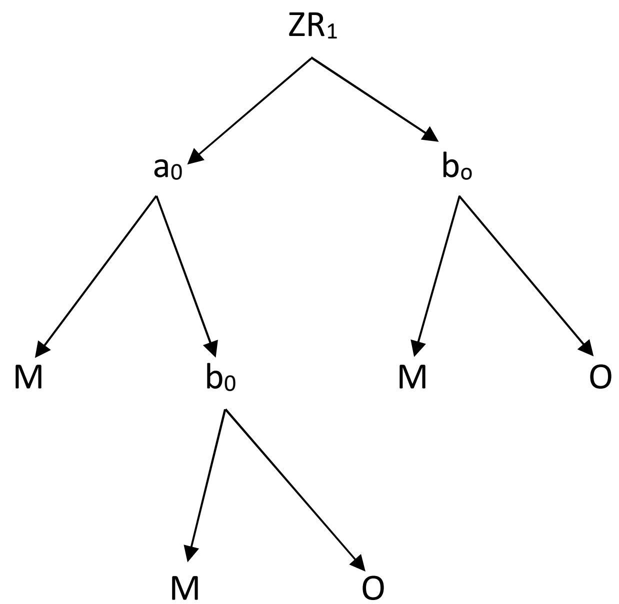
2. Fangen wir der Einfachheit halber mit dem ersten Teil von ZR an:

ZR_1 = {M, {M, O}},

hier liegt partielle Selbstenthaltung vor, die das Muster auch der zweiten Dyade ist, wo die Selbstenthaltung allerdings nicht M, sondern O betrifft. Mit AFA (Aczél 1988, S. 6 ff.) kann man diesen Fall wie folgt definieren:

ZR_1 = {a_0, b_0}, a_0 = {M, b_0}, b_0 = {M, O}.

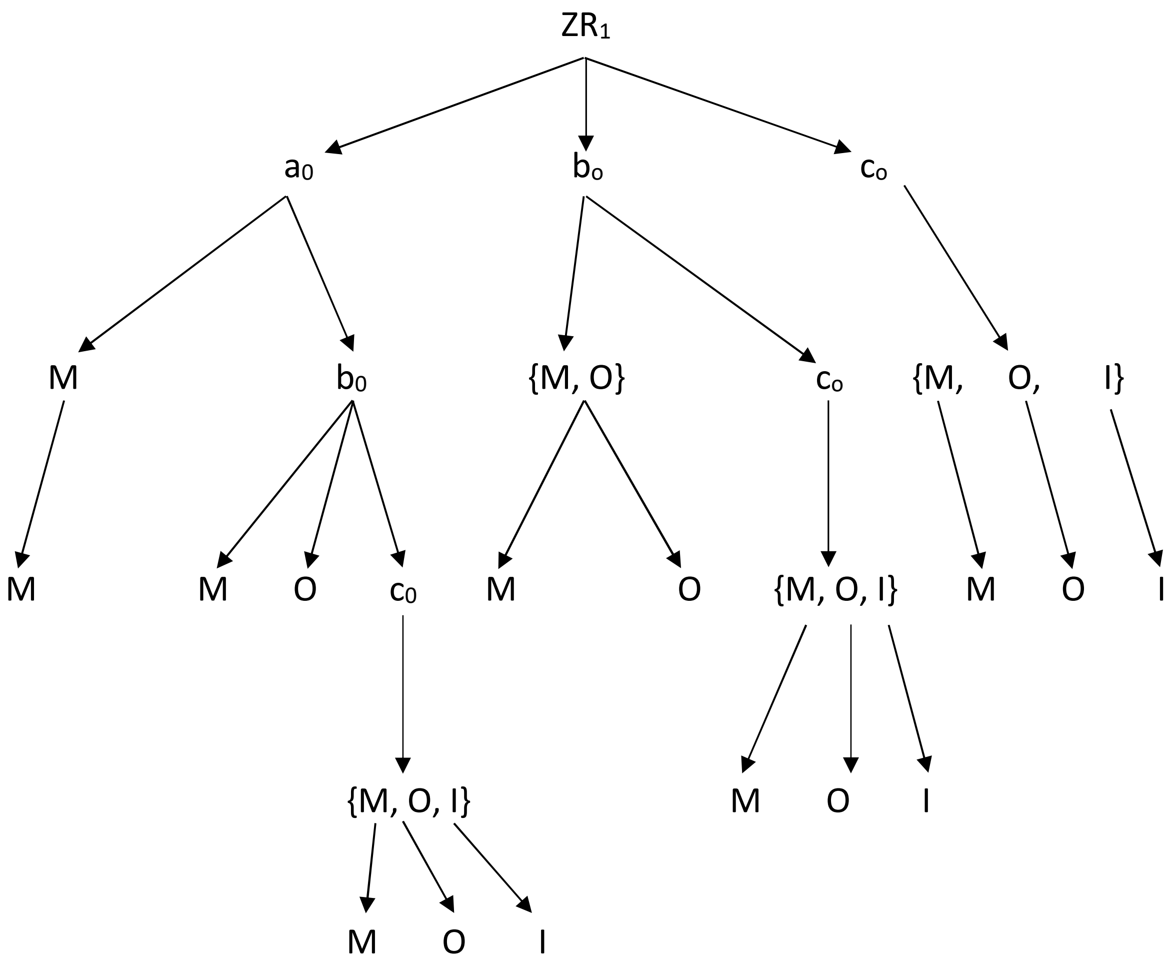
Man erhält dann:



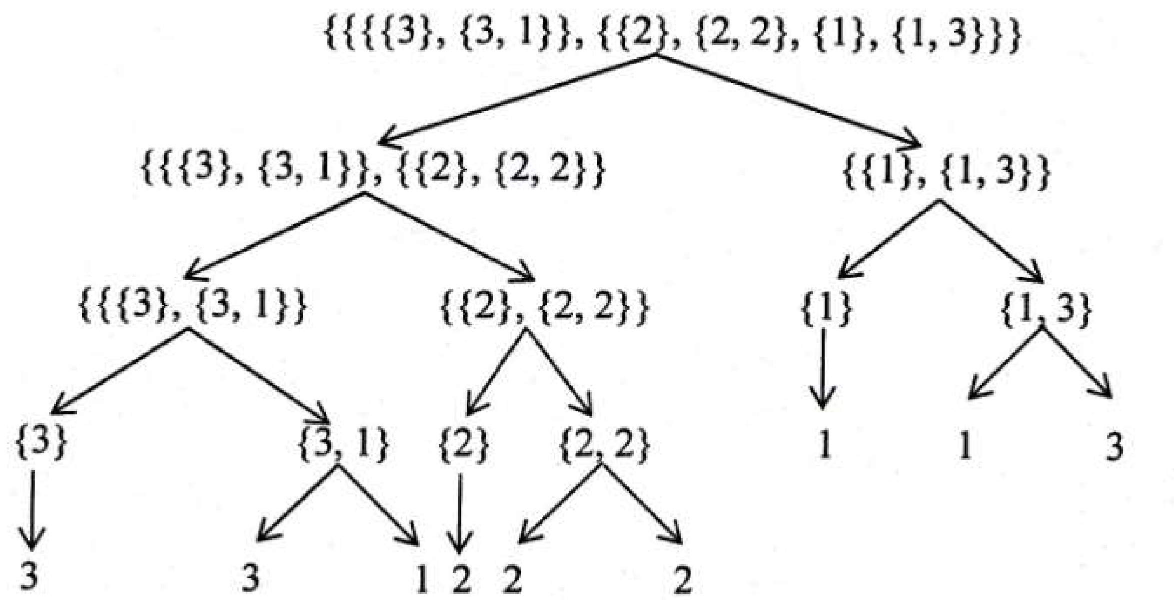
Um die ganze triadische Relation mit AFA darzustellen, kann man dann definieren:

ZR = $\{a_0, b_0, c_0\}$, $a_0 = \{M, b_0\}$, $b_0 = \{\{M, O\}, c_0\}$, $c_0 = \{M, O, I\}$.

Die Baumableitung von ZR sieht dann wie folgt aus:



Wie man Zeichenklassen und Realitätsthematiken ableiten kann, sei hier durch eine Abbildung gezeigt, die ich aus Toth (2006, S. 19) reproduziere:



Selbstreferentielle Semiotik setzt also die in diesem Aufsatz begründete neue semiotische Basistheorie unter Beibhehaltung der verschachtelten Peirceschen Zeichendefiniton voraus, allerdings muss in der zugehörigen Mengentheorie das Fundierungsaxiom durch das Aczelsche Anti-Fundierungsaxiom ersetzt werden.

Bibliographie

Aczel, Peter, Non-Well-Founded Sets. Stanford, CA, 1988

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Toth, Alfred, Grundlegung einer mathematischen Semiotik. Klagenfurt 2006, 2. Aufl. 2008

Toth, Alfred, Die Selbstenthaltung des Zeichens. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2010

Die Struktur von AFA-Zeichenklassen

1. Dass man die von Peirce relational und ordinal (logisch und mathematisch) eingeführte Definition des Zeichens auch mengentheoretisch fassen kann, ist natürlich alles andere als neu. Allerdings ist das Zeichen nicht einfach eine Menge, bestehend aus M, O und I oder aus {M}, {O} und {I}, sondern das Verhältnis von Ober- und Untermengen muss natürlich dem Inklusionsprinzip der relational-ordinalen Definition folgen, wie sie Bense (1979, S. 53) bisher am klarsten gegeben hatte:

$ZR = (M, ((M \rightarrow O), (M \rightarrow O \rightarrow I))) \cong$

$ZR = \{M, \{\{M, O\}, \{M, O, I\}\}\}$.

Wie man sieht, gibt es also in einer ZR drei mengentheoretische Einbettungs-ebenen:

1. $\{X\{\underline{\quad}_{.3}$

2. $\{X\{\ \{\underline{\quad}_{.2}$

3. $\{X\{\{\{\underline{\quad}_{.1}$,

und zwar für jede der drei trichotomischen Peirce-Zahlen eine, während die Position von X ($X \in \{1., 2., 3.\}$) jeweils für eine der drei triadischen Peirce-Zahlen reserviert ist.

2. Der Ausgangspunkt für diese, wie man sehen wird, sehr nützliche Unterscheidung liegt im Umstand, dass „gebrochene“ Kategorien (die durch kartesische Multiplikation „ganzer“ Kategorien entstehen), in jeglicher Beziehung fragwürdig sind. Während allerdings eine Teilmenge von ihnen

(1.1)

(2.1), (2.2)

(3.1), (3.2), (3.3),

also die Menge aller Subzeichen (a.b) mit b <= a, wenigstens valenztheoretisch korrekt gebildet sind (so kann z.B. in (3.1) die Drittheit eine Erstheit binden), sind die übrigen Subzeichen vollends unsinnig, denn z.B. wie sollte in (1.2) die Erstheit eine Zweitheit binden?

Man kann solche unsinnigen relationalen Bindungen allerdings dadurch „retten“, dass man, wie wir es oben taten, verschiedene Einbettungsebenen für die gebundenen trichotomischen Peirce-Zahlen annimt:

(a.1) = {1, {{{1}}}}

(a.2) = {1, {{2}}}

(a.3) = {1, {3}}

Genuine Subzeichen (identitive Morphismen) könnte man aber auch einfacher behandeln, vgl.

(1.1) = {1, 1}, (2.2) = {2, 2}, (3.3.) = {3, 3},

denn nach Aczels AFA (1988, S. 6) gilt

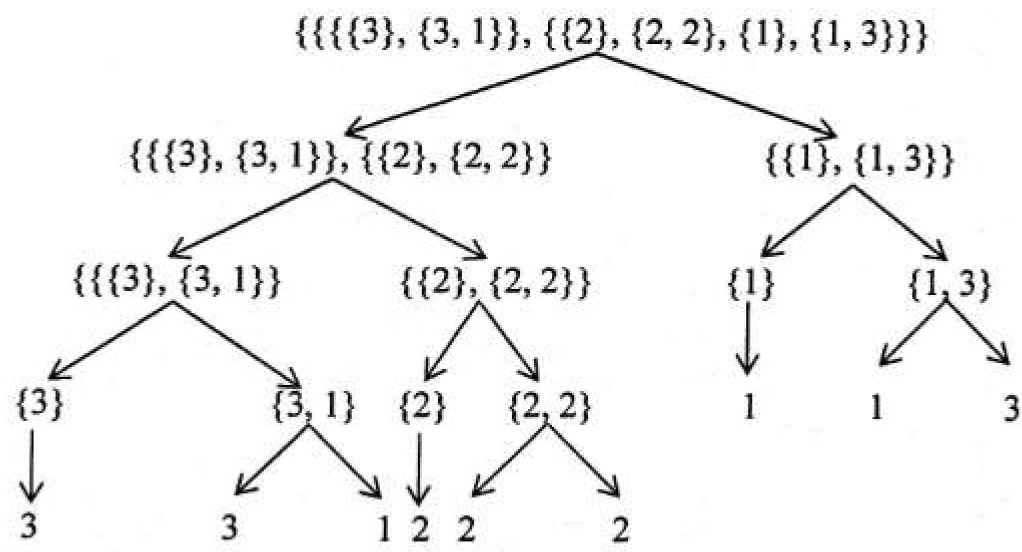
Ω = {Ω} = {Ω, Ω},

d.h. die im Zermelo-Fraenkelschen System (mit FA) paradoxe Menge, die sich selbt enthält, ist in einem AFA-System nicht nur existent, sondern sogar eindeutig bestimmt. Das bedeutet also

(1.1) = {1, 1} = {1},

und das ist ja gerade die genuine Erstheit (bzw. Zweitheit, Drittheit).

3. Wie bereits in Toth (2006, S. 19) gezeigt worden waren, wird eine Zeichenklasse wie z.B. (3.1 2.2 1.3) in einer mengentheoretischen Semiotik mit AFA anstatt FA wie folgt abgeleitet:



Damit ergeben sich als allgemeine zugrunde liegende Strukturen:

(1) für Zkln: (3.3.a 2.2.b 1.1.c)

(2) für Rthn: (c.11 b.2.2 a.3.3)

Berücksichtigen wir wieder die verschiedenen Einbettungsebenen, bekommen wir

(3) für die Triaden: $\{\{a\ {}_3\{_2\{_1\ b\ {}_1\}_2\}_3\}$

(4)für die Trichotomien: $\{\{b\ {}_1\{_2\{_3\ a\ {}_3\}_2\}_1\}$

Das Inklusionsgesetz der Linearität der Trichotomien lässt sich danach wie folgt formulieren:

$ZR = \{\{3\{_3\{_2\{_1\ a\ {}_1\}_2\}_3\}, 2\{_3\{_2\{_1\ b\ {}_1\}_2\}_3\}\ 2\{_3\{_2\{_1\ c\ {}_1\}_2\}_3\}$

mit $\{_3\{_2\{_1\ a\ {}_1\}_2\}_3\} \leq \{_3\{_2\{_1\ b\ {}_1\}_2\}_3\} \leq \{_3\{_2\{_1\ c\ {}_1\}_2\}_3\}$.

Bibliographie

Acel, Peter, Non well founded sets. Cambridge, 1988

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Toth, Alfred, Grundlegung einer mathematischen Semiotik. 2. Aufl Klagenfurt 2008

Inklusion und Partition

1. Bekanntlich ist eine Relation erst dann eine Zeichenrelationen, wenn sie aus inklusiven Partialrelationen besteht. So ist (1) keine Zeichenrelation, während (2) die Definition der Peirceschen Zeichenrelation ist:

(1) $R^3 = ({}^1M, {}^1O, {}^1I)$

(2) $ZR^3 = ({}^1M, {}^2O, {}^3I)$.

Falls x^m eine Partialrelation von R^n ist, dann gilt natürlich $n \geq m$, d.h. M, O, I können theoretisch die folgenden 24 Relationszahlen annehmen:

111; 112, 121, 211; 122, 212, 221;

113, 131, 311; 133, 313, 331;

222; 223, 232, 322; 333;

123, 132, 231, 21, 321, 312.

Dagegen wäre eine Relation mit einem m > n überbalanciert. Genau solche Relationen sind aber die Folge, wenn Partialrelationen mit Hilfe von kartesischen Produkten gebildet werden, vgl.

$1^1. \times .3^3 = 1^1.3^4$ vs. $3^3. \times .1^1 = 3^3.1^1$.

So regiert als im ersten Fall eine 1-stellige Relation eine 3-stellige (pathologisch), im zweiten, „dualen“, Fall aber eine 3-stellige eine 1-stellige (unterbalanciert, aber korrekt). Balanciert sind somit innerhalb der semiotischen Matrix allein die genuinen Subzeichen auf der Hauptdiagonalen.

2. Man müsste somit, ausgehend von den Verhältnissen bei den Subzeichen, annehmen, dass die drei effektiv aufscheindenden relationalen Verhältnisse – Unterbalanciertheit, Balanciertheit und Überbalanciertheit von Partialrelationen – auch auf der Ebene der Zeichenklassen aufscheinen. Doch merwürdigerweise hat hier bereits Peirce eine künstliche Ordnung in die Semiotik hineingetragen, die man folgendermassen formulieren kann:

Zkl = (3.a 2.b 1.c) mit $a \leq b \leq c$.

Die Ordnung besagt also, dass unterbalancierte trichotomische Werte eines Subeichens der Folge (n+1) relativ zu einem Subzeichen der Folge (n) zugelassen sind. Dies ist nun aber aus zwei Gründen ein Unsinn: Erstens einfach deswegen, weil hier die Zeichenklassen über den Subzeichen definiert werden, für die ja alle drei Typen von Balanciertheit definiert sind. Und zweitens deswegen, weil die genuine Relation a > b > c effektiv aufscheint, und zwar in der bereits erwähnten Hauptdiagonalen (3.3 2.2 1.1). Es ist also semiotisch widersprüchlich, unterbalancierte trichotomische Partialrelationen auszuschliessen. (Damit erhöht sich die Anzahl der Zeichenklassen aus die maximale Menge 3 x 3 x 3 = 27.)

3. Die Peircesche Definition der Zeichenrelation als einer triadischen Inklusionsrelation über einer monadischen, dyadischen und triadischen Relation (2) setzt voraus, dass die Relationen mengentheoretisch wie folgt interpretierbar sind:

ZR = $(M \subset (O \subset I))$,

denn erst so wird der Interpretant zum Zeichen selbst (vgl. Buczynska-Garewicz 1976). Der Interpretant als Zeichen enthält also das bezeichnete Objekt und das Mittel, und das bezeichnete Objekt enthält das Mittel. Damit entsteht also ein treppenartiges Modell des Zeichens, das die Bildung unter- und überbalancierter Subzeichens motiviert.

Demgegenüber ist es schwer vorstellbar, dass inklusive Verhältnisse bei Objekten gelten sollten. Ein Zeichenträger $\mathcal{M}$ gehört zwar der realen Welt der Objekte an, an er muss deswegen ja nicht ein Teil des Objektes sein, das er trägt (Ω). Ganz bestimmt ist auch der Interpret oder Zeichsetzer $\mathcal{J}$ weder eine Obermenge des Zeichenträgers noch des Subjektes, sondern alle drei objektalen Kategorien, $\mathcal{M}$, Ω, $\mathcal{J}$ sind ontologisch different, d.h. sie gehören verschiedenen Ontologien an. Wenn nun ein Objekt immer Menge einer Familie von Objekten ist (das gilt auch für „unitäre“ Objekte wie Einhörner, die Sonne, die Venus usw.), d.h. wenn gilt

$\Omega_I \in \{\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, ..., \Omega_n\}$,

so gehören die Objektfamilien selbst u.U. verschiedenen Ontologien an:

$\{\Omega_j\} \in [\Omega_k]$.

Demnach können wir die Bedingung der Non-Inklusion für objektale anstatt für semiotische Kategorien wie folgt formulieren:

$\mathcal{M} \in [\Omega_k], \Omega \in [\Omega_l], \mathcal{J} \in [\Omega_m]$ und $k \neq l \neq m$.

Ein Objekt per se ist also ein simples Gebilde, das wir z.B. mit Ω bezeichnen können. Die Feststellung, dass Objekte Gruppen bilden (z.B. Tassen, Gläser, Bowlen, Eimer, Kübel, Bierkrüge, ...) setzt bereits voraus, dass sie Objektklassen zugeordnet wurden. Dafür schreiben wir also $\Omega_l \in \{\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, ..., \Omega_n\}$. Wer nun einmal Lewis Carroll gelesen hat, der weiss, dass sich Objekt widerspenstig verhalten können, dann vor allem, wenn sie nicht derselben Ontologie wie wir angehören. Dafür schreiben wir $\{\Omega_j\} \in [\Omega_k]$. Ein Tisch in unserer Ontologie muss also kein Tisch in einer anderen Ontologie sein. Die Mehr-Ontologien-Relation benötigen wir allerdings auch dann, wenn wir Objekte Objektklassen zuordnen, denn die totale Inklusion der Zeichenrelationen gilt ja nicht für Objektrelationen, so dass normalerweise $\mathcal{M}$, Ω, $\mathcal{J}$ jeweils einer anderen Ontologie angehören. Z.B. ist der Fetzen Papier, auf den ich etwas schreibe, kein vorgegebenes, sondern ein künstlich hergestelltes (geschöpftes) Objekt. Die Nachricht, die ich darauf schreibe, ist z.B. ein blosses Gedankenobjekt (ein Plan, eine Absicht), und ich selbst bin natürlich weder Papier noch imaginär, sondern Fleisch und Blut. Eine Objektrelation $\mathcal{M} \subset \Omega \subset \mathcal{J}$ würde bedeuten, dass sowohl der reale Zeichenträger wie das reale Objekt im Interpreten, der realen Person, eingeschlossen sind. Das ist, wie man sofort erkennt, nur bei Gedankenzeichen ohne objektalen Referenten der Fall. Dieser Grenzfall ist aber das Zeichen an sich, das aus genau diesem Grunde eigenreal ist, weshalb wir statt $\mathcal{M} \subset \Omega \subset \mathcal{J}$ einfach $M \subset O \subset I$ oder gleich (2) $ZR^3 = (^1M, ^2O, ^3I)$ schreiben können.

4. Geht man von einer triadischen Relation

$R = (1, 2, 3)$,

so hat man im inklusiven Falle nur die Möglichkeiten genau einer Ordnung:

$R = (1 \subset 2 \subset 3)$,

d.h. die Permutationen (132, 231, 213, 321, 312) sind nicht definiert. So kann man nur dadurch weitere kategorielle Abstufungen bilden, dass man also Pathologie „gemischte“ oder „halbe“ Kategorien wie (1.2), (1.3), (2.3), ... einführt.

Geht man hingegen, wie im Falle von Objekten nicht anders möglich, davon aus, dass es überhaupt keine Inklusionsrelationen gibt, dann kann man Partialrelationen o.B.d.A. durch Partitionen bilden:

333 → 3321 → 33111 → 321111 → 3111111 → 21111111 → 111111111 bzw.

$3^3 \rightarrow 3^2 2^1 1^1 \rightarrow 3^2 1^3 \rightarrow 3^1 2^1 1^4 \rightarrow 3^1 1^6 \rightarrow 21^3 \rightarrow 1^7$.

Damit erübrigen sich Pathologien wie Unbalanicertheit und „fraktale“ Kategorien von selbst.

Bibliographie

Aczel, Peter, Non-Well-Founded Sets. Stanford, CA, 1988

Buczynska-Garewicz, Hanna, Der Interpretant, die Autoreproduktion des Symbols und die pragmatische Maxime. In: Semiosis 2, 1976, S. 10-17

Komplementäre Zeichen und Mengen

1. In Toth (2010) wurde gezeigt, dass man gestufte Relationen über Relationen, die mengentheoretisch ein Anti-Fundierungsaxiom benötigen (vgl. Aczel 1988) auf mindestens drei Arten definieren kann:

1.1. Benses „Treppen“-Definition. Bense spricht auch von „Verschachtelung“ (1979, S. 53):

ZR(.1., .2., .3.) =

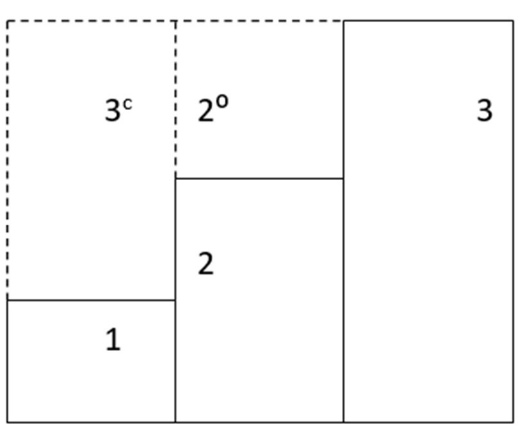
ZR 1.1 1.2 1.3,	1.1 1.2 1.3,	1.1 1.2 1.3
	2.1 2.2 2.3	2.1 2.2 2.3
		3.1 3.2 3.3

Kürzen wir die Zeichenklassen von links nach rechts und von oben nach unten durch grosse lateinische Buchstaben ab, so haben wir

ZR = (A, ((A, B), (A, B, C)))

A ist also in der Teilmenge (A, B) von A sowie in der Teilmenge (A, B, C) von A, die auch (A, B) enthält, enthalten, und (A, B) ist ausserdem Teilmenge der Teilmenge (A, B, C). Da aber ZR = A, B, C, enthält ZR nicht nur sämtliche Teilmengen, sondern acuh sich selbst, d.h. A = {A}, und man benötigt zur Vermeidung des Russellschen Paradoxes das Aczelsche Anti-Fundierungsaxiom, das selbstreferentielle Struktu-ren wie Mirmanoff-Sequenzen usw. erlaubt.

Das allgemeine Modell sieht wie folgt aus:



mit

$1 \subset \{2, 3\}$ und $1^o = 3^c$

$2 \subset \{3\}$ und $2^o = 2^c$

1.2. Das „Aufzugs-Modell“:

Das entsprechende mengentheoretische Zeichenmodell sieht dann wie folgt aus:

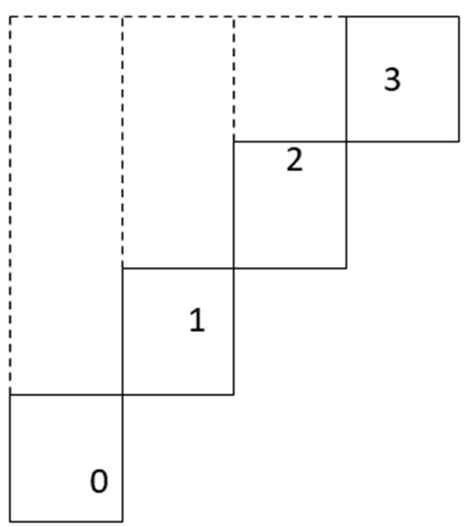
$ZR = ((M, (M \rightarrow O), (O \rightarrow I))$

Das Zeichen selbst enthält sich hier also nicht selbst, wohl aber die Fundamentalkategorien, d.h. seine Teilmengen, und zwar gilt

$M \subset (M \rightarrow O)$

$M \subset (O \rightarrow I)$.

Das allgemeine Modell sieht wie folgt aus:



mit

$0 \subset 1 \subset 2 \subset 3$ und $O^c = O^o + 1^o + 2^o + 3^o$

1.3. Das „Eskalator“-Modell:

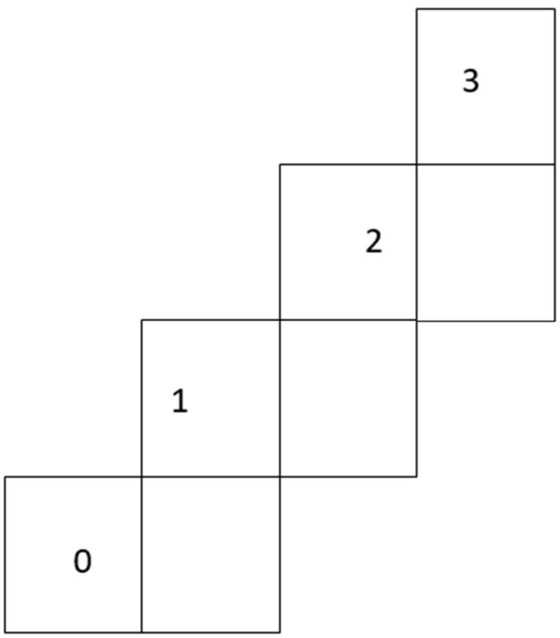
Für die entsprechende triadische Zeichenrelation gilt hier somit

$M \subset \{O, I\}$

$M, O \subset \{I\}$,

d..h es liegt ebenfalls keine Selbstenthaltung des Zeichens vor, sondern die komplementären Mengen sind in den Mengen enthalten, d.h. M in {O, I} und {M, O} in {I}.

Das allgemeine Modell sieht hier also wie folgt aus:



Es gilt

$0 \subset \{1, 2, 3\}$	$O^o \subset 1$	$O^o = O^c$
$0, 1 \subset \{2, 3\}$	$1^o \subset 2$	$1^o = 1^c$
$0, 1, 2 \subset \{3\}$	$2^o \subset 3$	$2^o = O^c$
		$3^o = 3^c$

und das heisst

$O^o + 0 = 0$

$1^o + 1 + 1^c = 1$

$2^{o} + 2 + 2^{c} = 2$

$3^{c} + 3 = 3$

Bibliographie

Aczel, Peter, Non-Well-Founded Sets. Stanford, CA, 1988

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Toth, Alfred, Treppe, Eskalator, Lift. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics

„In der Semiotik muss man nur auf 3 zählen können" (Max Bense)

1. Das Titelzitat stammt aus Benses letzter wöchtentlicher Vorlesung im Winter-Semester 1989/90 an der Universität Stuttgart und beeindruckte die beiden damals anwesenden Mathematiker, Günther Sigle und den Verfasser dieser Zeilen, einigermassen.

2. Tatsächlich hatte Bense (1980) die Fundamentalkategorien als „Primzeichen"-Relation

PZR = (1, 2, 3)

einführt. Allerdings steht hier die 1 für ^{1}R, die 2 für ^{2}R und die 3 für ^{3}R, so dass man also genauer schreiben sollte

PZR = ^{3}R(^{1}R, ^{2}R, ^{3}R),

zu lesen also: Die Primzeichen bilden eine triadische Relation über einer monadischen, einer dyadischen und einer triadischen Relation. Denn tatsächlich hatte Bense ja kurz zuvor das Verhältnis von (^{1}R, ^{2}R, ^{3}R) als „verschachtelte" Relation wie folgt definiert (Bense 1979, S. 53):

ZR = (M, ((M → O), (M → O → I))).

Relational geschrieben ist das also

PZR = R(^{1}R, ((^{1}R → ^{2}R), (^{1}R → ^{2}R → ^{3}R))),

wobei die grosse Frage auftaucht, welche Valenz das initiale R vor der Klammer hat. 6? Oder 14?

3. Direkt mit der Valenz der übergeordneten, umfassenden Relationen verschachtelter Relationen hängen nämlich verschiedene mögliche Zähl- bzw. Zahlensysteme zusammen. Wir können z.B. zeigen, dass Benses Primzeichen-Relation PZR = (1, 2, 3), worin er die Relationen mit den ersten zwei Primzahlen sowie der 1 identifizierte (und später das Ordnungsprinzip analog dem Peanoschen Nachfolgeprinzip konstruieren wollte [Bense 1975, S. 171 ff., 1983, S. 192 ff.]) falsch ist, denn in der Semiotik wird einfach nicht 1, 2, 3 gezählt – obwohl es gewissermassen richtig ist, zu sagen, in der Semiotik müsse man nur bis drei zählen

können. Allerdings verlangt dieses Zählen bis zur 3 ein ganz anderes als normales Verständnis der mengentheoretischen Grundlagen der Semiotik.

Der Grund: Da

${}^{1}R \subset {}^{2}R \subset {}^{3}R$

gilt, gilt auch:

$M \subset \{M\}$, $O \subset \{O\}$, $I \subset \{I\}$

und damit

$ZR \subset \{ZR\}$

und wegen I = ZR

$ZR = \{ZR\}$,

was zu Aczels Zirkelparadoxie führt (Aczel 1988, S. 6), falls wir nicht das Fundierungsaxiom ausschalten und sog. Mirimanoff-Folgen zu lassen, also das, was das berühmte Bild auf den „La vache qui rit"-Streichkäslein oder Mani Matters Lied „Bim Coiffeur" beinhaltet. Klassisch, d.h. mit Fundierungsaxiom, gilt nämlich

$ZR \cup \{ZR\} = \emptyset$,

und wegen ZR = {ZR} kämen wir dann nämlich zu

$ZR = \emptyset$,

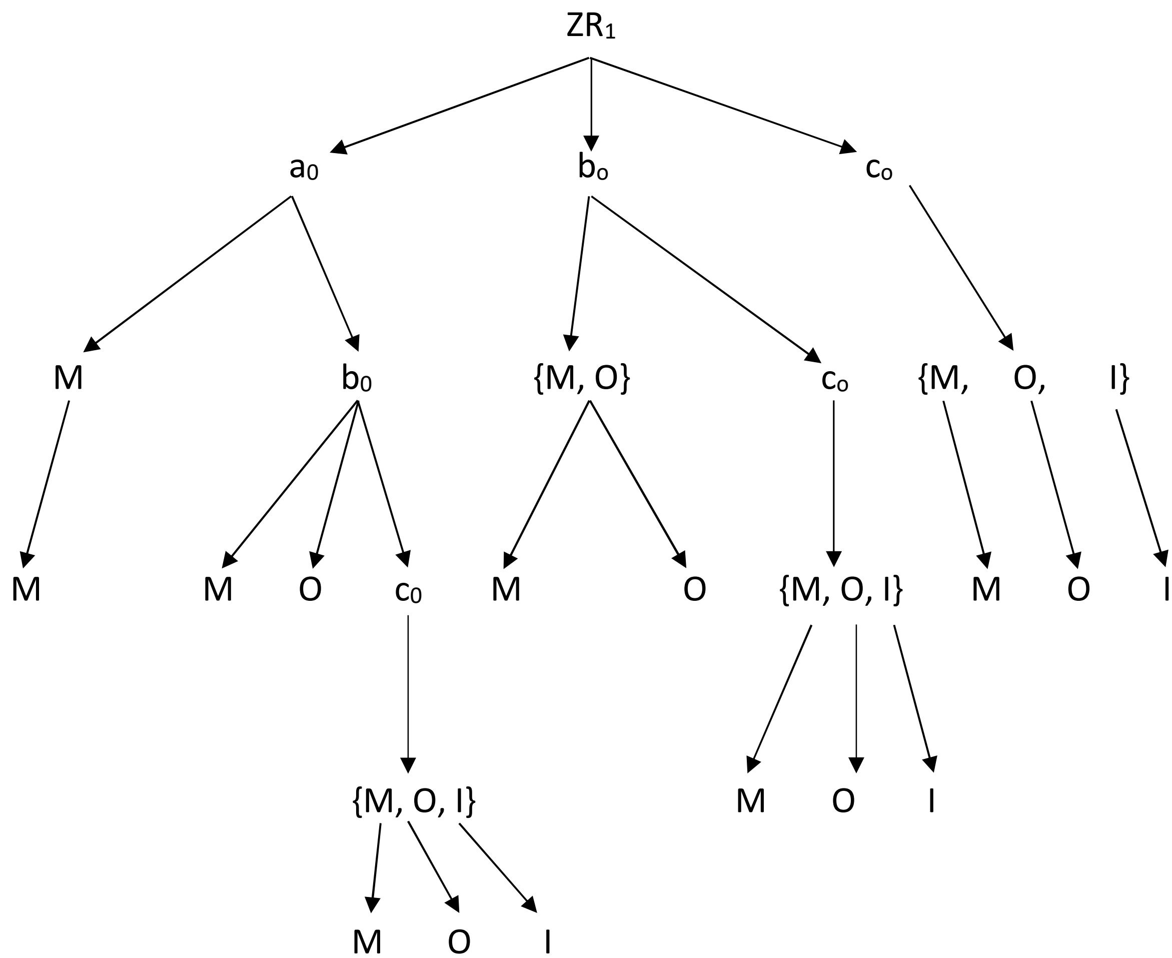
in Widerspruch zu PZR und ZR.

3. Während nämlich das Zählen bis 3 bei den Peano-Zahlen eine lineare Folge bildet:

$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$,

kann davon bei den verschachtelten Peirce-Zahlen, wie wir nun besser anstatt Primzeichen sagen, keine Rede sein:

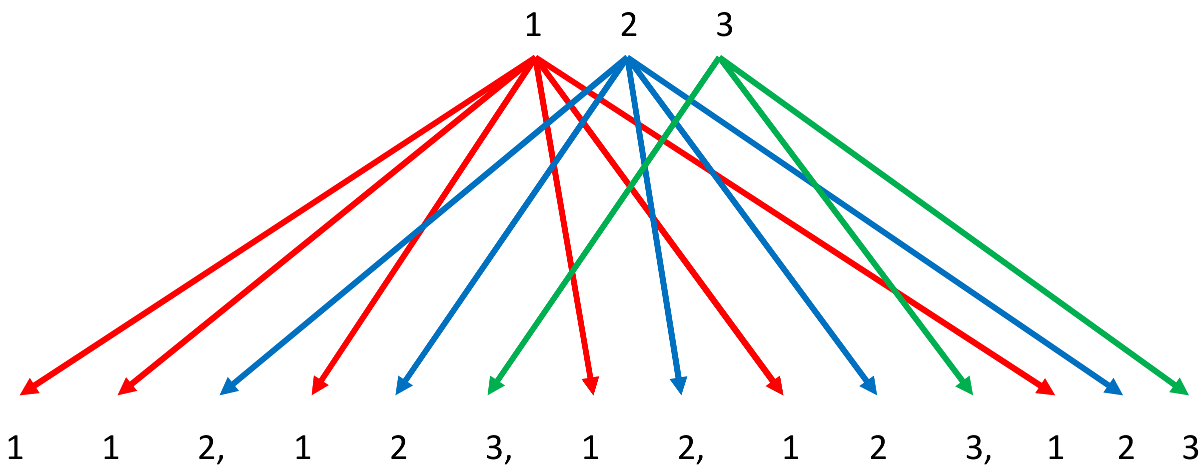
$ZR = \{a_0, b_0, c_0\}$, $a_0 = \{M, b_0\}$, $b_0 = \{\{M, O\}, c_0\}$, $c_0 = \{M, O, I\}$:



Und die Zahlenfolge der Peirce-Zahlen lautet demgemäss:

112, 123, 12, 123, 123

Es werden also 14 Ziffern benötigt, um in einem Zahlensystem auf 3 zu zählen, in dessen mengentheoretischer Basis das Fundierungsaxiom durch das Anti-Fundierungsaxiom ersesetzt ist. Die komplexe Beziehung zwischen den Peano- und den Peirce-Zahlen kann man z.B. wie folgt andeuten:



Bibliographie

Aczel, Peter, Non-Well-Founded Sets. Stanford, CA, 1988

Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1975

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden –Baden 1979

Bense, Max, Die Einführung der Primzeichen. In: Ars Semeiotica 3/3, 1980, S. 287-294

Bense, Max, Das Universum der Zeichen. Baden-Baden 1983

Pathologische Mengeninklusionen mit AFA

1. Die Ergebnisse von Toth (2010) sowie einiger früherer Arbeiten fortführend, komme ich nochmals auf die in Toth (2008, S. 177 ff.) eingeführten permutierten Zeichenklassen zurück. Demnach kann jede triadische Zeichenklasse in den folgenden 6 Formen erscheinen:

(3.a 2.b 1.c)	(2.b 3.a 1.c)	(1.c 3.a 2.b)
(3.a 1.c 2.b)	(2.b 1.c 3.a)	(1.c 2.b 3.a).

Da AFA die Menge, die sich selbst enthält

$\Omega = \{\Omega\}$

zulässt und diese zudem eindeutig bestimmt ist (Aczel 1988, S. 6)

$\Omega = \{\Omega\} = \{\Omega, \Omega\}$,

ist es möglich, nicht nur die „normalen" permutationellen Fälle von Zeichenklasen

$(3.a \supset 2.b \supset 1.c) = \{\{M, O, I\}, \{\{M, O\}, M\}\}$

$(1.c \subset 2.b \subset 3.a) = \{M, \{\{M, O\}, \{M, O, I\}\}$,

sondern auch die pathologischen sinnvoll zu behandeln:

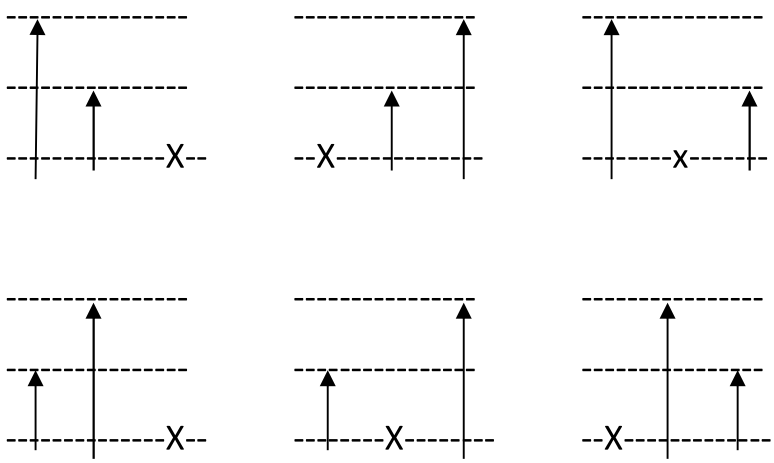
$(3.a \supset 1.c \subset 2.b) = \{\{M, O, I\}, \{M, \{M, O\}\}\}$

$(2.b \subset 3.a \supset 1.c) = \{\{M, O\}, \{\{M, O, I\}\}, M\}\}$

$(1.c \subset 3.a \supset 2.b) = \{M \{\{M, O, I\}, \{M, O\}\}$

$(2.b \supset 1.c \subset 3.a) = \{\{M, O\}, \{M, \{M, O, I\}\}\}$

Man kann sie auch mit Hilfe der folgenden Graphen darstellen:



Bibliographie

Aczel, Peter, Non-Well-Founded Sets. Stanford, CA, 1988

Toth, Alfred, Semiotische Strukturen und Prozesse. Klagenfurt 2008

Toth, Alfred, Die Struktur von AFA-Zeichenklassen. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2010

Pathologische Dyaden

1. Die Menge der dyadischen Subzeichen der semiotischen 3×3 Matrix lässt sich in zwei Untermengen teilen;

1.1. in die Menge

(1.1)

(2.1), (2.2)

(3.1), (3.2), (3.3)

der valenztheoretisch korrekt gebildeten und in die Komplementärmenge

(1.2), (1.3)

(2.3)

der valenztheoretisch inkorrekt gebildeten „gebrochenen" Kategorien. (So kann z.B. in 2.1 eine Zweitheit eine Erstheit bilden, aber in der Konversen 1.2 kann eine Erstheit keine Zweitheit binden.)

2. Um dieses Problem zu lösen, wurden in Toth (2010) 3 Einbettungsgrade der trichotomischen Peirce-Zahlen eingeführt:

1. $\{X\{\_\__{.3}$

2. $\{X\{\ \{\_\__{.2}$

3. $\{X\{\{\{\_\__{.1}$,

ausgehend von der Überlegung, dass in der von Bense definierten verschachtelten Zeichenrelation

$ZR = (M, ((M \rightarrow O), (M \rightarrow O \rightarrow I))) \cong \{M, \{\{M, O\}, \{M, O, I\}\}\}$

die Erstheit auf einer Einbettungsebene (n-2), die Zweitheit auf einer Einbettungsebene (n-1) und die Erstheit sich auf der Einbettungsebene (n) befinden. Da hier eine Mengentheorie mit AFA (Anti-Foundation Axiom) vorliegt, kann man letzteres sehr bequem damit beweisen, dass in solchen Mengentheorie

$\Omega = \{\Omega\} = \{\Omega, \Omega\}$

gilt. Es ist also in Sonderheit (a.a) = {a, a} = a, also die genuinen Subzeichen koinzidieren mit den entsprechenden Primzeichen (diese Tatsache wurde versteckt übrigens von Kaehr 2008 bei der Kontextuierung der Dyaden verwendet, indem „Primzeichen" dieselben Kontexturenzahlen bekommen wie die entsprechendne genuinen Subzeichen, d.h. identitiven Morphismen!).

3. Damit bekommen wir also „korrekt" gebildete gebrochene Kategorien, d.h. Dyaden der Form

(a.1) = {1, {{{1}}}}

(a.2) = {1, {{2}}}

(a.3) = {1, {3}},

abstrakt also das folgende Schema

$(a.b) = \{X, \{_3\ \{_2\ \{_1 Y\ _1\}\ _2\}\ _3\}$ ($X \in tdP = \{1., 2., 3.\}$, $Y \in ttP = \{.1, .2, .3\}$)

Somit können wir einige schöne, (vorerst?) nutzlose pathologische Dyaden dadurch konstruieren, dass wir die Koinzidenzen

3 ≡ {{{, 2 ≡ {{, 1 ≡ {

gegenseitig vertauschen:

Was für eine semiotische Bedeutung hätten pathologische Subzeichen wie

{3, {{1}}, {2, {{{3}}, {1{1}} ?

Immerhin scheint sich hier anzudeuten, dass „Spalten" bestehen zwischen den drei Fundamentalkategorien, dass diese somit nicht diskrete Punkte auf einem Zahlstrahl sind, sondern vielmehr in Intervallen zu liegen scheinen.

Bibliographie

Kaehr, Rudolf, Sketch on semiotics in diamonds. http://www.thinkartlab.com/pkl/lola/Semiotics-in-Diamonds/Semiotics-in-Diamonds.html (2008)

Toth, Alfred, Pathologische Mengeninklusionen mit AFA. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2010

Weitere pathologische Zeichenrelationen mit AFA

1. In Toth (2010a, b) wurden einige Pathologien gezeigt, die immerhin semiotische Relevanz haben könnten. Bislang wurde jedoch daran festgehalten, dass nach Bense (1979, S. 53) die Zeichenrelation

ZR = {M, {M, O}, {M, O, I}}

eine dreifach verschachtelte Relation darstellt. Ersetzt man das Fundierungsaxiom der zugrunde liegenden Mengenlehre durch das Aczelsche Anti-Fundierungsaxiom (AFA), so enthält also ZR 3 mal M, 2 mal O und 1mal I. Da M eine monadische Relation ist, kann man ihm mit der von Bense/Walther eingeführten „Drittels-rechnung" (vgl. Walther 1979, S. 108) den Wert

M = 1/3

zuordnen. Da O dyadisch ist, erhält es

O = 2/3,

und da I triadisch ist, bekommt es

I = 1/3.

Damit haben wir

ZR = (1/3M, 2/3O, 3/3I) = 6/3X,

also zweimal das Zeichen, das sich mit

I = {M, O, I}

ja selbst enthält, und das ist nichts anderes als die sich selbst enthaltende und dabei eindeutige Menge

Ω = {Ω} = {Ω, Ω},

die ja gerade durch AFA garantiert wird.

2. Hebt man nun jedoch die Verschachtelung auf – entsprechend der FA-Relation

ZR = {M, O, I} = {{M}, {O}, {I}}

mit dem „Repertoire“ {M}, dem „Objektbereich“ {O} und dem „Interpretantenfeld“ {I} (vgl. Walther 1979, S. 56) -, so kommt man zu einem enormen Reichtum semiotischer Strukturen, der bisher noch ganz ununtersucht brachliegt.

Heben wir das Paar und das Tripel aus, so haben wir eine hexadische Relation

$ZR^6 = \{M_1, M_2, M_3, O_1, O_2, I\}$.

Kombiniert man alle Relata miteinander, erhält man bereits 6^6 = 46´656 Möglichkeiten. Schliesst man je 2 Relata zu Paaren zusammen, so dass sich also 5 Elemente kombinieren lassen, ergeben sich 5^5 = 3´125 Möglichkeiten, usw. Zusammen ergibt also ein Total von $6^6 + 5^5 + 4^4 + 3^3 + 2^2 + 1$ = 50´069 Möglichkeiten, von denen $ZR = \{M_1 \{M_2, O_1\}, \{M_3, O_2, I_1\}\}$ nur gerade 1 Möglichkeit darstellt.

Bibliographie

Toth, Alfred, Pathologische Mengeninklusionen mit AFA. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2010a

Toth, Alfred, Pathologische Dyaden. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2010b

Walther, Elisabeth, Allgemeine Zeichenlehre. 2. Aufl. Stuttgart 1979

Selbstinklusionen bei Trichotomien

1. Da Zeichenrelationen selbstinklusiv sind

ZR ={M, {M, O}, (M, O, I}} (Bense 1979, S. 37)

und also in normalen mengentheoretischen Systemen zur Russellschen Paradoxie führen, kann man sie unter Berücksichtigung des Anti-Fundierungsdaxioms „retten“ und daher Zirkularität in der Semiotik ermöglichen, welche z.B. für die Autoreproduktion der Zeichen benötigt wird.

2. Allerdings zeigt die obige Relation nur die Selbstinklusion der Triaden, nicht aber der Trichotomien. Letztere sind bekanntlich nur bei der kategorienrealen Relation, der Hauptdiagonalen der semiotischen Matrix,

(3.3 2.2 1.1) × (1.1 2.2. 3.3.),

identisch, nicht aber bei den 10 Peirceschen Zeichenklassen:

3.1 2.1 1.1 $1 \subset 1 \subset 1$:= {M {M {M}}}

3.1 2.1 1.2 $2 \supset 1 \subset 1$:= {(M O}, M}

3.1 2.1 1.3 $3 \supset 1 \subset 1$:= {{I, M}, M}

3.1 2.2 1.2 $2 \subset 2 \supset 1$:= {{O, {O}}, M}

3.1 2.2 1.3 $3 \supset 2 \supset 1$:= {(I, O}, M}

3.1 2.3 1.3 $3 \subset 3 \supset 1$:= {{I, {I}}, M}

3.2 2.2 1.2 $2 \subset 2 \subset 2$: = {M {M {M}}}

3.2 2.2 1.3 $3 \supset 2 \subset 2$:= {{I, O}, O}

3.2 2.3 1.3 $3 \subset 3 \supset 2$:= {{I, {I}}, O}

3.3 2.3 1.3 $3 \subset 3 \subset 3$:= {I {I {I}}} und ebenfalls nicht bei den weiteren 17, den sog. „irregulären“ Zeichenklassen oder Zeichenrelationen:

3.1 2.2 1.1	1⊂2⊃1	:=	{{M, {O}}, M}
3.1 2.3 1.1	1⊂3⊃1	:=	{{M, {I}}, M}
3.1 2.3 1.2	2⊂3⊃1	:=	{{O, {I}}, M}
3.2 2.1 1.1	1⊂1⊂2	:=	{M {M {O}}}
3.2 2.1 1.2	2⊃1⊂2	:=	{{O, M}, O}
3.2 2.1 1.3	3⊃1⊂2	:=	{{I, M}, O}
3.2 2.2 1.1	1⊂2⊂2	:=	{M {O {O}}}
3.2 2.3 1.1	1⊂3⊃2	:=	{{M, {I}}, O}
3.2 2.3 1.2	2⊂3⊃2	:=	{{O, {I}}, O}
3.3 2.1 1.1	1⊂1⊂3	:=	{M {M {I}}}
3.3 2.1 1.2	2⊃1⊂3	:=	{{O, M}, I}
3.3 2.1 1.3	3⊃1⊂3	:=	{{I, M}, I}
3.3 2.2 1.1	1⊂2⊂3	:=	{M {O {I}}}
3.3 2.2 1.2	2⊂2⊂3	:=	{O {O {I}}}
3.3 2.2 1.3	3⊃2⊂3	:=	{{I, O}, I}
3.3 2.3 1.1	1⊂3⊂3	:=	{M {I {I}}}
3.3 2.3 1.2	2⊂3⊂3	:=	{O {I {I}}}

Bibliographie

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Zur kategorietheoretischen Struktur von FA und AFA Zeichenklassen und Realitätsthematiken

1. FA-Zeichenklassen haben die alphanumerische Struktur

ZKL = (3.a 2.b 1.c) mit a, b, c $\in$ {.1, .2, .3}

und eine dyadische kategoriale Struktur

ZKL = [[(3→2) (a→b), [(2→1), (b→c)]].

Für FA-Realitätsthematiken gilt

RTH = (c.1 b.2 a.3)

RTH = [[(c→b), (1→2)], [(b→a), (2→3)]]

2. Degegenüber haben AFA-Zeichenklassen die alphanumerische Struktur

ZKL* = (3.3.a 2.2.b 1.1.c)

und eine triadische kategoriale Struktur

ZKL* =[[id_3, {$\alpha^o\beta^o$, β^o, id_3}], [id_2, {β, α^o, id_2}], [id_1, {$\beta\alpha$, α, id_1}]].

Für AFA-Realitätsthematiken gilt

RTH* = (c.1.1 b.2.2 a.3.3)

RTH* = [{$\alpha^o\beta$, α^o, id_1}, id_1], [{β^o, α, id_2}, id_2], {$\beta\alpha$, β, id_3}, id_3]].

Bibliographie

Aczel, Peter, Non-Well-Founded Sets. Stanford, CA, 1988

Zur kategorietheoretischen Struktur von FA und AFA Zeichenklassen und Realitätsthematiken

1. FA-Zeichenklassen haben die alphanumerische Struktur

ZKL = (3.a 2.b 1.c) mit a, b, c $\in$ {.1, .2, .3}

und eine dyadische kategoriale Struktur

ZKL = [[(3→2) (a→b), [(2→1), (b→c)]].

Für FA-Realitätsthematiken gilt

RTH = (c.1 b.2 a.3)

RTH = [[(c→b), (1→2)], [(b→a), (2→3)]]

2. Degegenüber haben AFA-Zeichenklassen die alphanumerische Struktur

ZKL* = (3.3.a 2.2.b 1.1.c)

und eine triadische kategoriale Struktur

ZKL* =[[id_3, {$\alpha^o\beta^o$, β^o, id_3}], [id_2, {β, α^o, id_2}], [id_1, {$\beta\alpha$, α, id_1}]].

Für AFA-Realitätsthematiken gilt

RTH* = (c.1.1 b.2.2 a.3.3)

RTH* = [{$\alpha^o\beta$, α^o, id_1}, id_1], [{β^o, α, id_2}, id_2], {$\beta\alpha$, β, id_3}, id_3]].

Bibliographie

Aczel, Peter, Non-Well-Founded Sets. Stanford, CA, 1988

Selbstinklusionen bei multivarianten Semiotiken

1. Es soll hier kurz darauf hingewiesen werden, wie man eine multivariante Semiotik (Toth 2010a), definiert über

$ZR = \{\{M_n\}, \{O_n\}, \{I_n\}\}$,

die also nicht von bereits selektierten M, O und I, sondern von ihren zugehörigen M-Repertoires, O-Bereichen und I-Feldern ausgeht, mit einer auf einer Mengentheorie mit Ersatz des Foundations Axioms durch das Anti-Foundation-Axiom aufgebauten Semiotik (Toth 2010b) kombiniert

$ZR^* = \{M, \{M, O\}, \{M, O, I\}\}$.

2. Grob gesagt, werden bei einer Kombination von ZR und ZR* also sämtliche Mengen nochmals in Untermengen aufgesplittet. Da dieser Prozess sehr schnell zu Mirimanoff-Reihen führt, liegt hierin ein weiterer Hinweis für die Brauchbarkeit der Kombination von ZR und ZR* in selbstreferentiellen Systemen.

2.1. Zunächst können wir die n-reihigen monadischen Relationen explizit notieren als

$M_n = \{M_1, M_2, M_3, ..., M_n\}$,

$O_n = \{M_1, M_2, M_3, ..., M_n\}$,

$I_n = \{I_1, I_2, I_3, ..., I_n\}$.

2.2. Hernach schreiben wir die n-reihigen dyadischen Relationen wie folgt

$\{M, O\} = \{M_1 \rightarrow O_1, M_2 \rightarrow O_2, M_3 \rightarrow O_3, …, M_n \rightarrow O_n\}$

$\{M, O\} = \{M_1 \rightarrow O_2, M_1 \rightarrow O_3, M_1 \rightarrow O_4, …, M_{n-1} \rightarrow O_n\}$

$\{M, O\} = \{M_2 \rightarrow O_3, M_2 \rightarrow O_4, M_2 \rightarrow O_5, …, M_{n-2} \rightarrow O_n\}$

…

$\{M, O\} = \{M_1 \rightarrow O_2, M_2 \rightarrow O_3, M_3 \rightarrow O_4, …, M_{n-1} \rightarrow O_n\}$

$\{O, I\} = \{O_1 \rightarrow I_1, O_2 \rightarrow I_2, O_3 \rightarrow I_3, …, O_n \rightarrow I_n\}$

$\{O, I\} = \{O_1 \rightarrow I_2, O_1 \rightarrow I_3, O_1 \rightarrow I_4, \ldots, O_{n-1} \rightarrow I_n\}$

$\{O, I\} = \{O_2 \rightarrow I_3, O_2 \rightarrow I_4, O_2 \rightarrow I_5, \ldots, O_{n-2} \rightarrow I_n\}$

…

$\{O, I\} = \{O_1 \rightarrow I_2, O_2 \rightarrow I_3, O_3 \rightarrow I_4, \ldots, O_{n-1} \rightarrow I_n\}$

$\{I, M\} = \{I_1 \rightarrow M_1, I_2 \rightarrow M_2, I_3 \rightarrow M_3, \ldots, I_n \rightarrow M_n\}$

$\{I, M\} = \{I_1 \rightarrow M_2, I_1 \rightarrow I_3, I_1 \rightarrow I_4, \ldots, I_{n-1} \rightarrow M_n\}$

$\{I, M\} = \{I_2 \rightarrow I_3, I_2 \rightarrow I_4, O_2 \rightarrow I_5, \ldots, O_{n-2} \rightarrow I_n\}$

…

$\{I, M\} = \{I_1 \rightarrow M_2, I_2 \rightarrow M_3, I_3 \rightarrow M_4, \ldots, I_{n-1} \rightarrow M_n\}$

2.3. Da $(M \rightarrow O) \circ (O \rightarrow I) = (M \rightarrow O \rightarrow I)$, bekommen wir abgekürzt

$\{M, O, I\} = \{M_1 \rightarrow O_1 \rightarrow I_1, M_2 \rightarrow O_2 \rightarrow I_2, M_3 \rightarrow O_3 \rightarrow I_3, \ldots, M_n \rightarrow O_n \rightarrow I_n\}$

…

$\{M, O, I\} = \{M_1 \rightarrow O_2 \rightarrow I_3, M_2 \rightarrow O_3 \rightarrow I_4, M_3 \rightarrow O_4 \rightarrow I_5, \ldots, M_{n-2} \rightarrow O_{n-1} \rightarrow I_n\}$

3. Damit ergibt sich also als Schema

$ZR^* = \{M, \{M, O\}, \{M, O, I\}\} =$

$ZR = \{ \{M_1, M_2, M_3, \ldots, M_n\}, \{M_1 \rightarrow O_2, M_2 \rightarrow O_3, M_3 \rightarrow O_4, \ldots, M_{n-1} \rightarrow O_n\}, \ldots, \{O, I\} = \{O_1 \rightarrow I_2, O_2 \rightarrow I_3, O_3 \rightarrow I_4, \ldots, O_{n-1} \rightarrow I_n\}, \{M_1 \rightarrow O_1 \rightarrow I_1, M_2 \rightarrow O_2 \rightarrow I_2, M_3 \rightarrow O_3 \rightarrow I_3, \ldots, M_n \rightarrow O_n \rightarrow I_n\}, \ldots, \{M_1 \rightarrow O_2 \rightarrow I_3, M_2 \rightarrow O_3 \rightarrow I_4, M_3 \rightarrow O_4 \rightarrow I_5, \ldots, M_{n-2} \rightarrow O_{n-1} \rightarrow I_n\} \}.$

Bibliographie

Toth, Alfred, Elemente einer multivarianten Semiotik. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2010a

Toth, Alfred, Zeichenklassen mit AFA. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2010b

Multivarianz, AFA und Erfüllung

1. Will man die rekursive Definition der Zeichenklasse

$ZR_r = \{M, \{\{M, O\}, \{M, O, I\}\},$

in der das mengtheoretische Fundierungsaxiom durch das Anti-Fundierungs-Axiom Aczéls (1988) ersetzt ist (wodurch Mirimanoff-Folgen zugelassen werden und die Menge, die sich selbst enthält, nicht-paradoxal sowie eindeutig bestimmt ist) mit der von Toth (2010) eingeführten multivarianten Definition der Zeichenklasse

$ZR_m = \{\{M_i\}, \{O_i\}, \{I_i\}\}$

verbinden, in der anstatt von Mittel-, Objekt- und Interpretantenbezug vom Mittel-Repertoire, Objektbereich und Interpretantenfeld ausgegangen wird (vgl. Walther 1979, S. 56) zusammenbringen, so kommt man auf die folgende Zeichendefinition mit irreduzibler Klammerung

$ZR_{rm} = \{\{M_i\}, \{\{\{M_i\}, \{O_i\}\}, \{\{M_i\}, \{O_i\}, \{I_i\}\}\}.$

2. Damit ist es möglich, zu entscheiden, ob ein zeichenartiges Gebilde in Bezug auf M, O oder I ein Zeichen ist, und zwar über die folgenden modelltheoretischen Erfüllbarkeitsrelationen:

$\{M_i\} \vDash \phi$ gdw Erf $\{M_i\}\ \phi$

$\{O_i\} \vDash \chi$ gdw Erf $\{O_i\}\ \chi$

$\{I_i\} \vDash \psi$ gdw Erf $\{I_i\}\ \psi$

Bibliographie

Aczél, Peter, Non-well founded Sets. Cambridge 1988

Toth, Alfred, Multivariante Semiotik. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2010

Walther, Elisabeth, Allgemeine Zeichenlehre. 2. Aufl. Stuttgart 1979

Ein semiotisches Modell für Determination aus Indetermination

1. Gegeben sei

$ZR = \{M_i, \{M_i, O_j\}, \{M_i, O_j, I_k\}\}$.

Zunächst können wir die n-reihigen monadischen Relationen explizit notieren als

$M_n = \{M_1, M_2, M_3, ..., M_n\}$,

$O_n = \{M_1, M_2, M_3, ..., M_n\}$,

$I_n = \{I_1, I_2, I_3, ..., I_n\}$.

Hernach schreiben wir die n-reihigen dyadischen Relationen wie folgt

$\{M, O\} = \{M_1 \rightarrow O_1, M_2 \rightarrow O_2, M_3 \rightarrow O_3, ..., M_n \rightarrow O_n\}$

$\{M, O\} = \{M_1 \rightarrow O_2, M_1 \rightarrow O_3, M_1 \rightarrow O_4, ..., M_{n-1} \rightarrow O_n\}$

$\{M, O\} = \{M_2 \rightarrow O_3, M_2 \rightarrow O_4, M_2 \rightarrow O_5, ..., M_{n-2} \rightarrow O_n\}$

…

$\{M, O\} = \{M_1 \rightarrow O_2, M_2 \rightarrow O_3, M_3 \rightarrow O_4, ..., M_{n-1} \rightarrow O_n\}$

sowie

$\{O, I\} = \{O_1 \rightarrow I_1, O_2 \rightarrow I_2, O_3 \rightarrow I_3, ..., O_n \rightarrow I_n\}$

$\{O, I\} = \{O_1 \rightarrow I_2, O_1 \rightarrow I_3, O_1 \rightarrow I_4, ..., O_{n-1} \rightarrow I_n\}$

$\{O, I\} = \{O_2 \rightarrow I_3, O_2 \rightarrow I_4, O_2 \rightarrow I_5, ..., O_{n-2} \rightarrow I_n\}$

…

$\{O, I\} = \{O_1 \rightarrow I_2, O_2 \rightarrow I_3, O_3 \rightarrow I_4, ..., O_{n-1} \rightarrow I_n\}$

und ausserdem

$\{I, M\} = \{I_1 \rightarrow M_1, I_2 \rightarrow M_2, I_3 \rightarrow M_3, ..., I_n \rightarrow M_n\}$

$\{I, M\} = \{I_1 \rightarrow M_2, I_1 \rightarrow I_3, I_1 \rightarrow I_4, ..., I_{n-1} \rightarrow M_n\}$

$\{I, M\} = \{I_2 \rightarrow I_3, I_2 \rightarrow I_4, O_2 \rightarrow I_5, ..., O_{n-2} \rightarrow I_n\}$

…

$\{I, M\} = \{I_1 \rightarrow M_2, I_2 \rightarrow M_3, I_3 \rightarrow M_4, ..., I_{n-1} \rightarrow M_n\}$

2. Da

$(M \rightarrow O) \circ (O \rightarrow I) = (M \rightarrow O \rightarrow I)$

ist, bekommen wir abgekürzt

$\{M, O, I\} = \{M_1 \rightarrow O_1 \rightarrow I_1, M_2 \rightarrow O_2 \rightarrow I_2, M_3 \rightarrow O_3 \rightarrow I_3, ..., M_n \rightarrow O_n \rightarrow I_n\}$

…

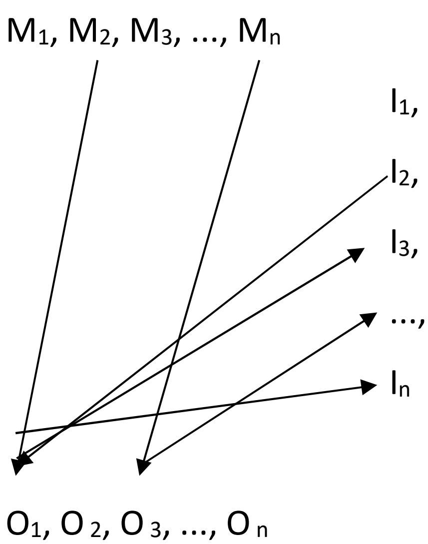
$\{M, O, I\} = \{M_1 \rightarrow O_2 \rightarrow I_3, M_2 \rightarrow O_3 \rightarrow I_4, M_3 \rightarrow O_4 \rightarrow I_5, ..., M_{n-2} \rightarrow O_{n-1} \rightarrow I_n\}$

Damit ergibt sich also als Schema

$ZR = \{M_i, \{M_i, O_j\}, \{M_i, O_j, I_k\}\} =$

$\{ \{M_1, M_2, M_3, ..., M_n\}, \{M_1 \rightarrow O_2, M_2 \rightarrow O_3, M_3 \rightarrow O_4, ..., M_{n-1} \rightarrow O_n\}, ... ,\{O, I\} = \{O_1 \rightarrow I_2, O_2 \rightarrow I_3, O_3 \rightarrow I_4, ..., O_{n-1} \rightarrow I_n\}, \{M_1 \rightarrow O_1 \rightarrow I_1, M_2 \rightarrow O_2 \rightarrow I_2, M_3 \rightarrow O_3 \rightarrow I_3, ..., M_n \rightarrow O_n \rightarrow I_n\}, ..., \{M_1 \rightarrow O_2 \rightarrow I_3, M_2 \rightarrow O_3 \rightarrow I_4, M_3 \rightarrow O_4 \rightarrow I_5, ..., M_{n-2} \rightarrow O_{n-1} \rightarrow I_n\} \},$

wodurch wir ein sehr einfaches, erstes Modell zur Generierung von Determiniertheit aus Indetermineirtheit erhalten:



bzw. (die Pfeilverbindungen sind wiederum arbiträr):

$M_1 \rightarrow O_2, M_2 \rightarrow O_3, M_3 \rightarrow O_4, \ldots, M_{n-1} \rightarrow O_n$

$M_1 \rightarrow O_2 \rightarrow I_3$

$M_2 \rightarrow O_3 \rightarrow I_4$

$M_3 \rightarrow O_4 \rightarrow I_5,$

$\ldots,$

$M_{n-2} \rightarrow O_{n-1} \rightarrow I_n$

$O_1 \rightarrow I_2, O_2 \rightarrow I_3, O_3 \rightarrow I_4, \ldots, O_{n-1} \rightarrow I_n$

Bibliographie

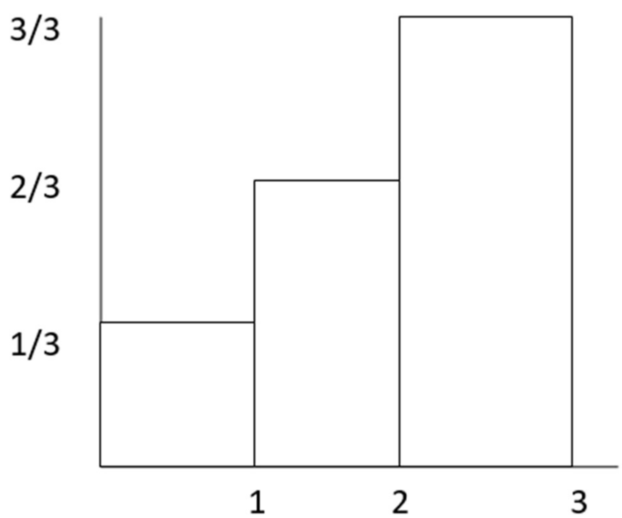
Toth, Alfred, Zeichenklassen mit AFA. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2010b

Zeichenrelationstrukturen und Komplemente

1. Wir führen folgende Neuerung in die Theoretische Semiotik ein: Zur Darstellung von Relationen, Mengen usw. benützen wir ein Koordinatensystem, auf deren Abszisse wir die Primzeichen und auf deren Ordinate wir die Inklusionen eintragen. Die von Bense (1979, S. 53) definierte Peirce Zeichenrelation

ZR = (M, ((M → O), (M → O → I))

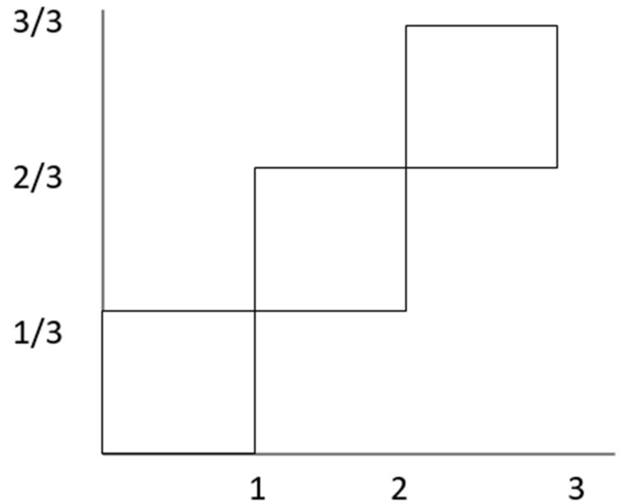
kann dann wie folgt dargestellt werden:



2. Dies war das in Toth (2010) so genannten „Treppenmodell". Will man ZR in Form des Aufzugs-Modells darstellen, so bekommt man die Zeichenrelation

ZR = ((M, (M → O), (O → I))

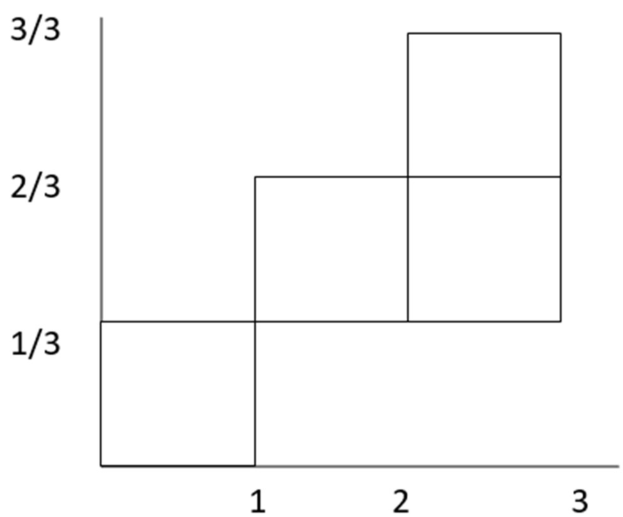
und als zugehöriges Modell:



3. Als drittes Modell wurde ebenfalls in Toth (2010) das sog. Eskalator-Modell vorgeschlagen, das eine Art Kompromiss (Vermittlung) der beiden obigen Modelle darstellt und auf der Zeichenrelation

ZR = (M, ((M → O), (O →I), (O → I))

definiert ist:



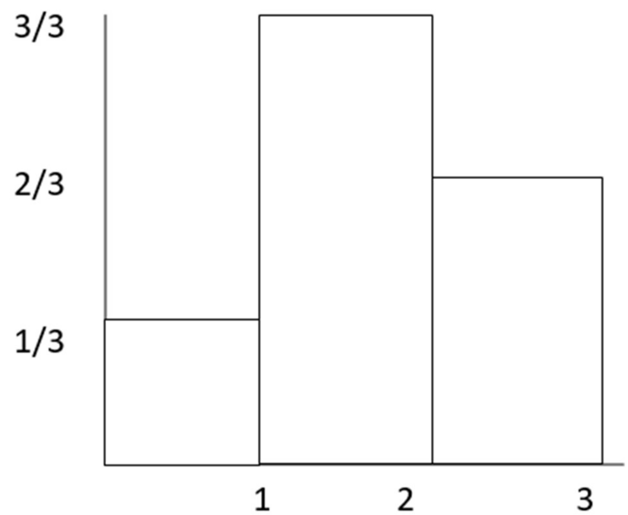
4. Neben diesen drei „regulären“ Zeicheinklusionsmodellen kann man jedoch noch eine sehr grosse Anzahl „irregulärer“ konstruieren. In einer 1. Gruppe muss lösen wir dadurch die Ordnungsrelation der Primzeichen

PZ = 1 > 2 > 3

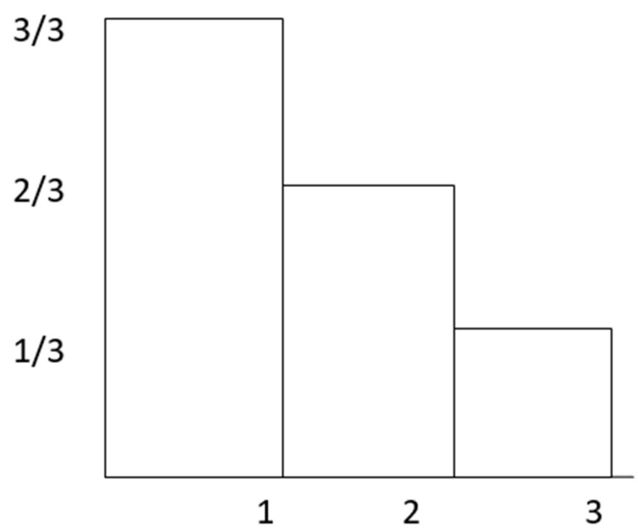
auf.

Da wir eine triadische Relation vor uns haben, bekommen wir dadurch 3! = 6 permutationelle Ordnungen, darunter die folgenden 5 neuen:

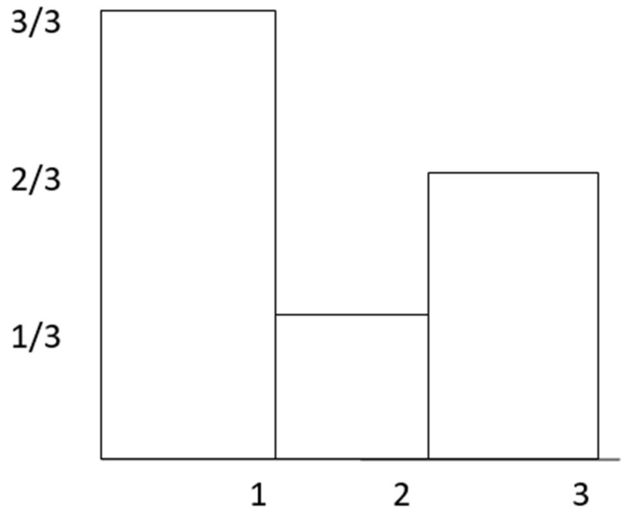
4.1. ZR = (M, I, O)



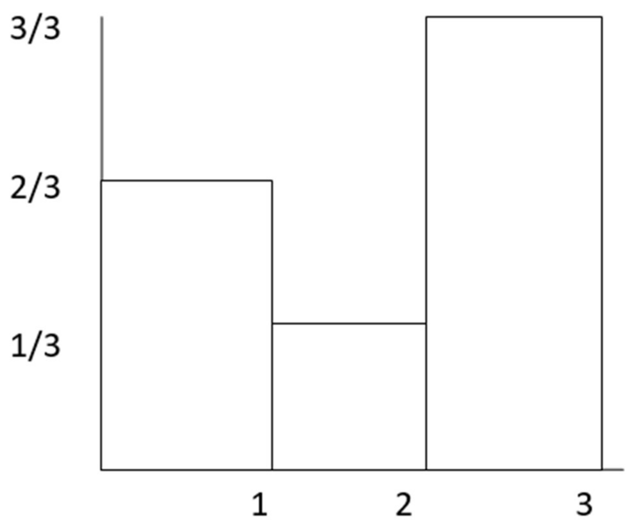
4.2. ZR = (I, O, M)



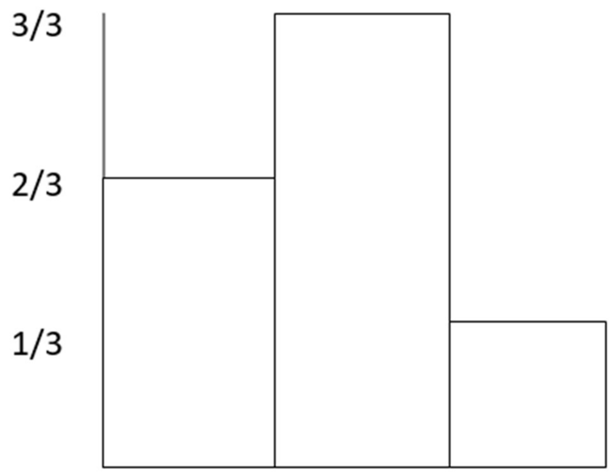
4.3. ZR = (I, M, O)



4.4. ZR = (O, M, I)



4.5. ZR = (O, I, M)

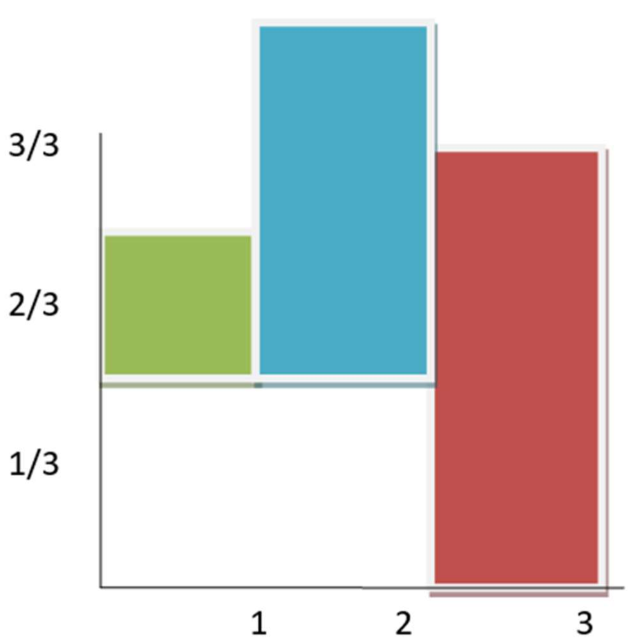


5. In einer 2. Gruppe lösen wir die Inklusionordnung

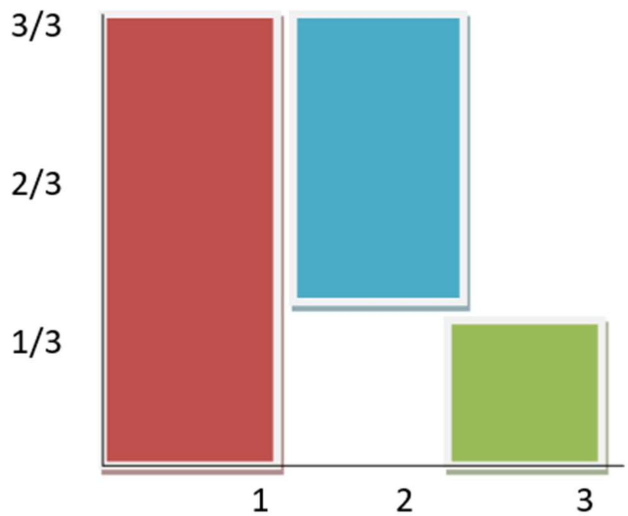
ZR = .1. ⊂ .2. ⊂ .3.

auf. Damit sind wir bei den „pathologischen“ Relationen angelangt, insofern hier z.B. 3 < 1 gelten kann, also im Grunde Erscheinungen, die sonst nur in polykontexturalen Systemen aufscheinen. Unter den zahlreichen Möglichkeiten vgl. z.B.

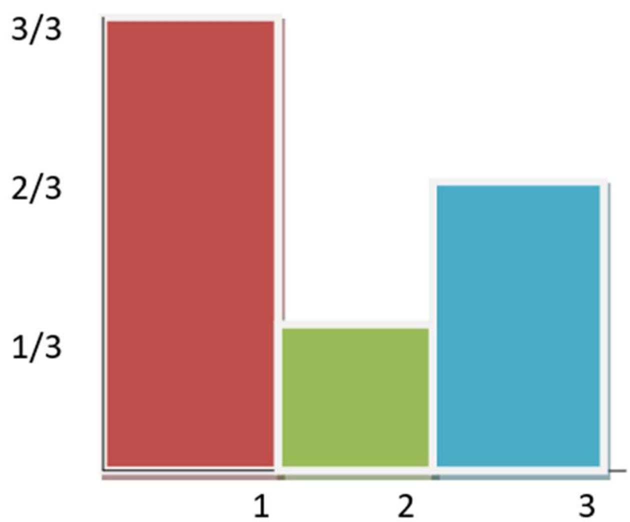
5.1. ZR = (M, I, O)



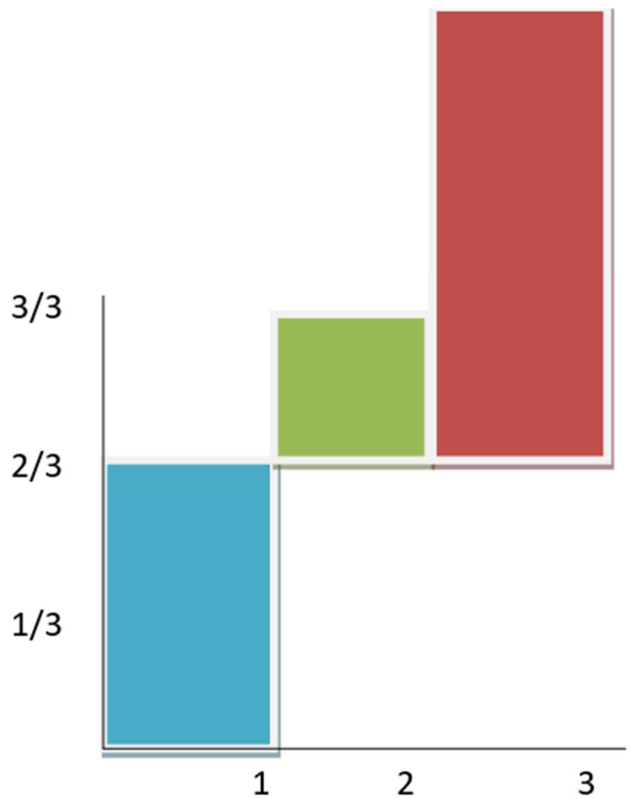
5.2. ZR = (I, O, M)



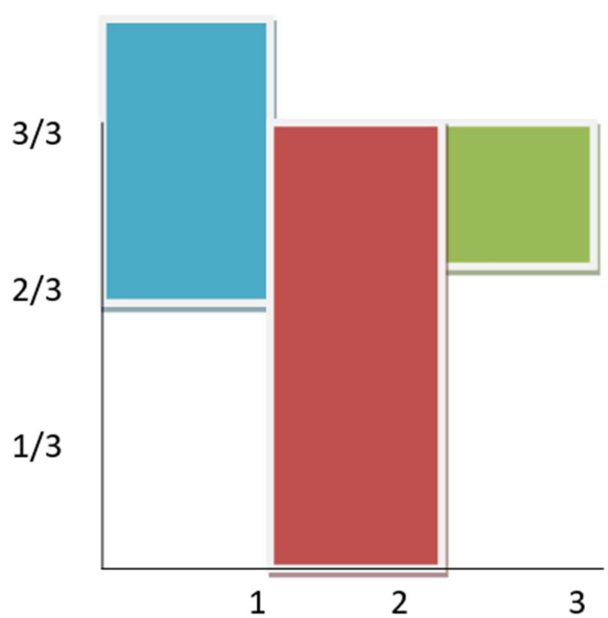
5.3. ZR = (I, M, O)



5.4. ZR = (O, M, I)

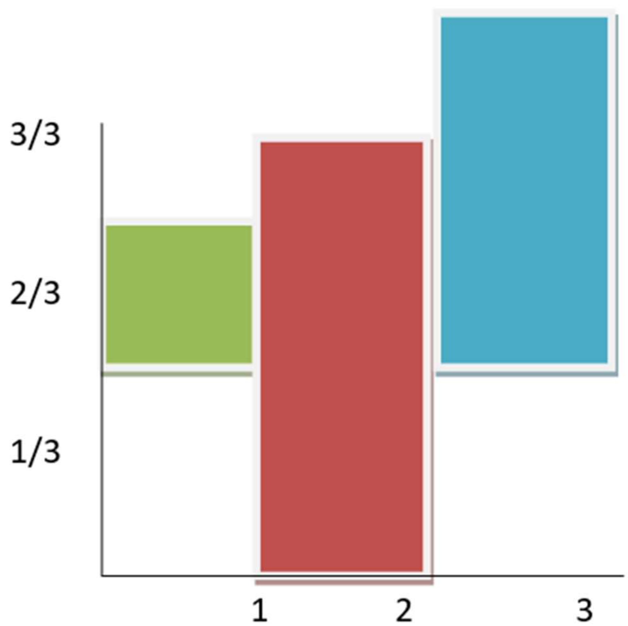


5.5. ZR = (O, I, M)

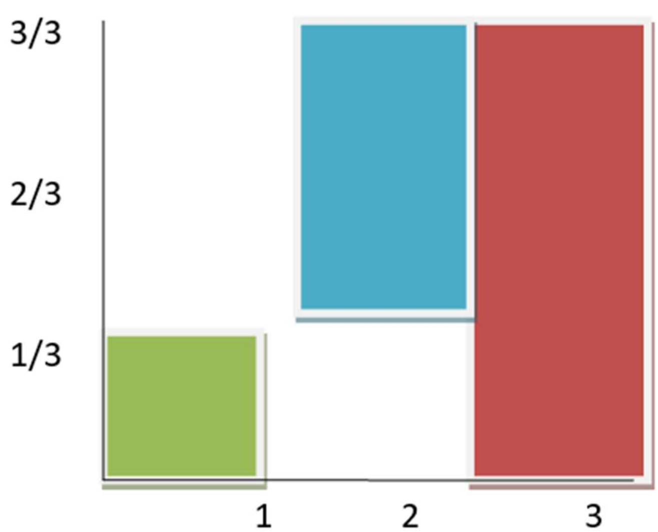


6. Kombiniert nun beide Aufhebungen miteinander, d.h. löst man zugleich die Ordnung der PZO = (1 > 2 > 3) und diejenige der Inklusonen IO = (.1. ⊂ .2. ⊂ .3.) auf, so gibt es naürlich für alle in 5 ausschnittsweise behandelten Typen nochmals 6 Permutationen, also etwa die folgenden:

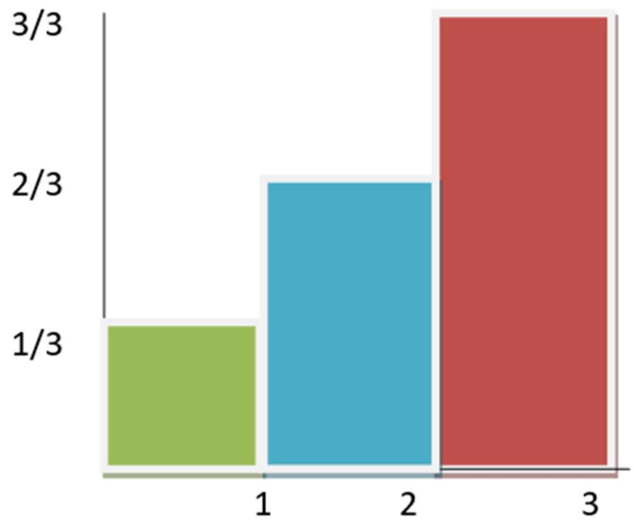
6.1. ZR = (M, I, O)



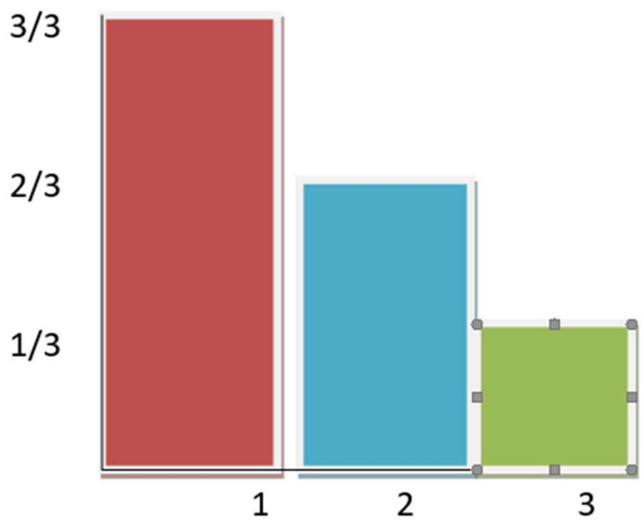
6.2. ZR = (I, O, M)



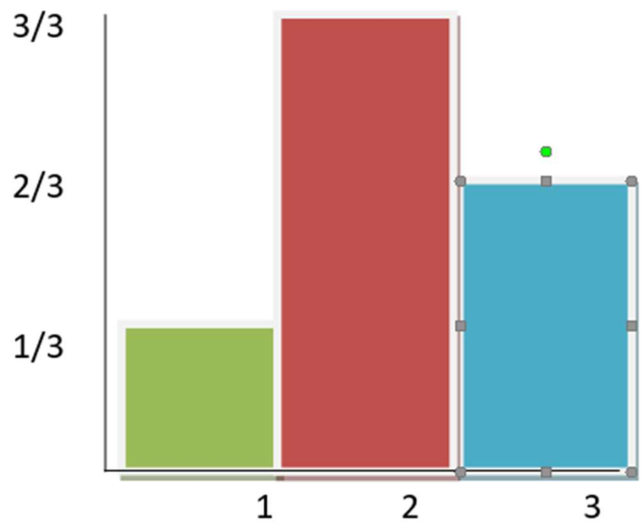
6.3. ZR = (I, M, O)



6.4. ZR = (O, M, I)



6.5. ZR = (O, I, M)



7. Alle in 4.-6. präsentierten Typen mit aufgehobener Primzeichen- oder/und Inklusionsordnung beruhen auf dem in 1. dargestellten Zeichenmodell Typ 1. Selbstverständlich kann man alles natürlich auch noch anwenden auf die unter 2. und 3. dargestellten Zeichenmodelle Typ 2 und 3, d.h. nicht nur auf das Treppenmodell, sondern auch auf die Lift- und Eskalatormodelle. Zusammenfassend ergibt sich eine sehr grosse Anzahl völlig neuer semotischer Modelle, die von der Peirceschen Basisteorie nicht zugänglich und natürlich im Hinblick auf ihre Applikation hin nchzuprüfen sind.

Bibliographie

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Toth, Alfred, Treppe, Eskalator, Lift. Drei mengentheoretische und semiotische Modelle mit Anti-Fundierungsaxiom. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2010

Neues zu einer semiotischen Grammatiktheorie

1. In einem seiner (meistens zu Unrecht) viel-belächelten 17 Bücher formulierte der leider zu früh verewigte Erlanger Linguist August Dauses, die Sprach- und Grammatiktheorie leide an der Grundkrankheit, pleonastisch zu sein (Dauses 1994). Denjenigen, der von der Mathematik herkommt, erstaunt eine solche Feststellung eigentlich nicht sonderlich (wie sie die Linguisten erschreckt hat, die sie als Unsinn abgetan haben), sondern er fragt sich, wieso es bis 1994 gedauert hat, bis der Missstand, dass Sprache durch Sprache beschrieben wird, erst entdeckt worden war. In der Logik und der Mathematik hat bekanntlich die Russellsche Entdeckung der bekannten Paradoxie in Freges Arithmetik zu einem Jahrzehnte andauernden Grundlagenstreit und zur Aufteilung der Mathematik in verschiedene „Richtungen" (z.B. Formalismus vs. Intuitionismus) geführt. Aber nichts dergleichen ist in der Linguistik geschehen. Selbst in Chomskys generativer Grammatik wird Sprache mit Sprache beschrieben, auch wenn die Transformations- und weiteren Regeln teilweise die Gestalt „mathematischer" Gesetze anzunehmen scheinen. Im Gegenteil wurde der v.a. in den 60er Jahren auch auf deutschen Sprachgebiet im Vormarsch befindlichen Mathematischen Linguistik der Vorwurf gemacht, es werde hier eine dem Gegenstand (d.h. der Sprache) fremde Methode (d.h. die Mathematik) gewissermassen überworfen bis über sie übergestülpt.

2. Wie soll man also Sprache beschreiben, ohne sich der logischen Zirkularität schuldig zu machen und wertlose Rekursionen zu produzieren?

Während es bestimmt möglich ist zu bestreiten, dass unterhalb der Sprache als tiefere Schicht die Mathematik liege (diese Idee geht wohl auf John von Neumanns „The Computer and The Brain" von 1958 zurück; vgl. die Diskussion bei Bense 1990, S. 29 ff.), kann wohl niemand bestreiten, dass Sprache ein bestimmtes und vielen weiteren Zeichensystemen ist. Sprache ist also primärzwar nicht unbedingt ein Zahlensystem, aber bestimmt ein Zeichensystem, genauer: ein metasemiotisches System, wie Bense (1981, S. 91 ff.) sich ausdrückte. Hier gibt es nun erstens das in Walther (1979, S. 100 ff.) präsentierte System, das von

ZR = (M, O, I)

ausgeht und M die Laute, Silben und Wörter, O die Wortarten und I eine Art von logischer Syntax, von Walther „Konnexe“ genannt, zuordnet. Das hat natürlich zur Folge, dass man z.B. keine Phono-, Morpho- und Lexikotaktik unterscheiden kannund dass die Semantik, d.h. der Interpretantenbezug, mit der Syntax zusammenfällt, usw.

Zweitens kann man jedoch von dem in Bense (1979, S. 67) präsentierten zirkulären Zeichenmodell (wechselseitiger Inklusion der Fundamentalkategorien bzw. semiotischen Funktionen)

$ZR^* = (M, ((M \rightarrow O), (M \rightarrow O \rightarrow I))$

ausgehen. Wie man sieht, erscheint hier M seit seinem ersten Auftreten in der ersten Partialrelation auch in der zweiten und dritten Partialrelation, dasselbe gilt pr. pr. für O. Nur I erscheint nur einmal, und wie aus $ZR = (M \rightarrow O \rightarrow O) \subset ZR^*$ hervorgeht, benötigt die Benses Zeichendefinition zugrunde liegende Mengentheorie ein Anti-Fundierungs-Axiom.

3. Für eine semiotische Grammatiktheorie, welche über Walthers Ansatz hinaus geht, kann man nun M als „Repertoire“ definieren, $(M \rightarrow O)$ als „Bedeutung“ im Sinn der allgemeinen Semantik, und $(M \rightarrow O \rightarrow O)$ als „Taktik“. Man kann sogar anstatt M eine Menge von Repertoires $\{\{M_i\}\}$ einführen, um etwa die Phoneme isoliert, z.B. in Diasystemen, innerhalb der Morphologie (z.B. Zusammenfall der Homorganen im Idg., ausserdem einiger Homolocalen im Finnischen Stufenwechsel, usw.) zu unterscheiden oder z.B. die bereits erwähnte Taktik von der Phonotaktik bis hinauf zur Taktik von Texten zu differenzieren, denn die höchste semiotische Ebene, I, wird nach dieser Konzeption ja als die „Vermittlungsinstanz“ betrachtet, welche die Repertoires M und das Verhältnis dieser Repertoires zum bezeichneten Objekt (vom Einzelobjekt bis zur komplexen Schilderung der Ereignisse eines Romans) miteinander in Beziehung setzt.

Bildet man die Matrix über ZR* anstatt über ZR, erhält man

	M	{M, O}	{M, O, I}
M	MM	M{M, O}	M{M, O, I}
{M, O}	{M, O}M	{M, O}{M, O}	{M, O} {M, O, I}
{M, O, I}	{M, O, I}M	{M, O, I}{M, O}	{M, O, I}{M, O, I}

und wie man sieht, bekommt man nun, wenn man von der Trias „Repertoire – Semantik – Taktik“ ausgeht, das folgendes elementares grammatiktheoretisches Modell

	Repertoire	Semantik	Taktik
Repertoire	REP	Wortbildung	Funkt. SP
Semantik	Morphol.	SEM	Wortstellung
Taktik	Phonotaktik	Semotaktik	TAK

REP, SEM, TAK sind dabei die Idealgebiete, wie die „reine Phonetik“ Sievers, die „reine Semantik“ Havers (Emphasietheorie), und TAK wäre etwa die angeblich von sämtlichen übrigen grammatischen Ebenen unbeeinflusste Syntaxtheorie in Chomsky (1957). In die Repertorietheorie der Semantik fällt die klassische Wortbildungslehre; hier wird z.B. entschieden, warum es Schleswig-Holstein, aber nicht *Mercedes-Opel gibt. Die Repertoiretheorie der Taktik behandelt die Funktionale Satzperspektive mit ihren syntaktischen Grundtypen (SOV, SVO, VSO,

...) ebenso wie ihren pragmatischen Aufteiungen in subjekt- und topikprominente Sprachen. Die Semantik der Repertoires behandelt z.B. die klassische Morphologie, d.h. das System der Prä-, In- und Suffixe, d.h. der Affixe sowie (Nominal-, Verbal- usw.) Ableitungen von Wörtern. Die Semantik der Taktik behandelt die Wortstellung, und zwar – wie aus diesem Modell klar hervorgeht – primär unabhängig von der FSP, den syntakt. und pragm. Grundtypen, d.h. sie befasst sich z.B. mit Topikalisierungen, Fokussierungen und verwandten Phänomenen und i.a. mit der „Freiheit" der Wortstellungen von Sprachen (vgl. die bekannte Liste der Permutationen des lat. Satzes „Caesar pontem fieri iussit"). Die drei Taktiken des Interpretantenbezugs bedürfen keiner Erläuterung mehr; vorbildlich zu ihrer Erforschung war die Stratifikationsgrammatik, in der bekanntlich jedes Stratum seine eigene Taktik besass.

4. Für eine massgebliche Verfeinerung des Analyseapparates empfiehlt sich der Übergang von der kleinen zur grossen Semiotik Matrix, die in Bense (1975) eingeführt worden war. In der entsprechenden Matrix, die 81 und nicht 9 Eintrge enthält, bilden die Basiselemente dann nicht mehr Paare, sondern Paare von Paaren kartesischer Produkte.

Bibliographie

Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1975

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Bense, Max, Axiomatik und Semiotik. Baden-Baden 1981

Bense, Max, Die Eigenrealität der Zeichen. Baden-Baden 1992

Chomsky, Noam, Syntactic Structures. MIT 1957

Dauses, August, Theorien der Linguistik. Stuttgart 1994

von Neumann, John, The Computer and The Brain. Princeton 1958

Walther, Elisabeth, Allgemeine Zeichenlehre. 2. Aufl. Stuttgart 1979

Evidenz für die Mengenkonzeptionen der Fundamentalkategorien

1. Die klassische Peircesche Zeichendefinition lautet bekanntlich

ZR = (M, O, I),

d.h. die Selektion aus dem M-Repertoire, dem O-Bereich und dem I-Feld (Walther 1979, S. 56) werden aus der Semiose selbst verbannt, d.h. ihr als präsemiotische Prozesse vorangesetzt.

2. Demgegenüber lautet die zirkuläre Zeichendefinition Benses (1979, S. 53, 67)

ZR* = (M, ((M → O), (M → O → I)),

die der folgenden AFA-Definition äquivalent ist (Toth 2010)

ZR* = {{M}, {{{M} → {O}}, {{M} → {O} → {I}}}.

In ZR* wird also im Gegensatz zu ZR von Mengen von Kategorien und Mengen von Relationen, kurz: Mengen von Partialrelationen ausgegangen.

3.1. Homonymie

$ZR_2 = (M_1 \in \{M_n\}, O_2, \in \{O_n\}, I_2 \in\{I_n\}\}$

3.2. Synonymie

$ZR_1 = (M_1 \in \{M_n\}, O_1 \in \{O_n\}, I_1 \in\{I_n\}\}$

$ZR_2 = (M_2 \in \{M_n\}, O_1, \in \{O_n\}, I_1 \in\{I_n\}\}$

Als Beispiel für die Mengenkonzeption von {{M} → {O}} nenne ich die javanischen Wortschätze des Ngoko, Kromo und Kromo-Inggil. Ca. 500 Wörter werden in dieser indonesischen Sprache dahingehend unterschieden, an wen die Kommunikation intendiert ist, d.h. ob Junge zu Alten, Profane und Geistliche oder amtliche Würdenträger, Gläubige usw. sprechen. Nur selten sind die Ngoko- und Kromowörter jedoch von etymologisch verschiedenen Stämmen (d.h. Synonyma) abgeleitet; sie sind jedoch abgeleitet durch Vokal- und Konsonantenwechsel (und zwar v.a. durch nicht-homorganischen!), durch Affigierung, weitere Mittel sowie deren Kombination. Zur Illustration folgt hier ein Ausschnitt aus dem Ngoko-Kromo-Doppelwörterbuch in Herrfurth (1967)

126 Wörterverzeichnisse

26. *bandjir*	*bena*	Überschwemmung
27. *bandjur*	*ladjeng*	dann, danach
28. *banju*	*toja*	Wasser
29. *bata*	*banon*	Stein
30. *-bathik*	*-serat*	batiken
31. *batur*	*réntjang*, K.I.: *abdi*	Diener, Gehilfe
32. *bedhil*	*sendjata*	Gewehr
33. *bener*	*leres*	richtig, wahr
34. *bengi*	*dalu*	Nacht
35. *beras*	*wos*	geschälter Reis
36. *betjik*	*saé*	gut
37. *bijèn*	*rumijin*	früher, ehemals
38. *bisa*	*saged*	können
39. *botjah*	*laré*	Kind (allgemein)
40. *buri*	*wingking*	hinten
41. *dalan*	*margi*	Weg, Straße
42. *dawa*	*pandjang*	lang
43. *dhajoh*	*tamu*	Gast
44. *dhèk*	*kala*	als; wenn
45. *-deleng*	*-tingal*, K.I.: *-priksa*	sehen, schauen
46. *désa*	*dhusun*	Dorf
47. *dhéwé*	*pijambak*	selbst, allein, eigen
47a. *dhèwèké*	*pijambakipun*, K.I.: *pandjenenganipun*	er, sie, es
48. *dhisik*	*rumijin*	vorher, früher
49. *dhuwit*	*jatra*, *arta*	Geld
50. *dhuwur*	*inggil*	hoch
51. *djago*	*sawung*	Hahn
52. *-djaluk*	*nedha*, K.I.: *-suwun*[1], *-pundhut*[2]	Bitte, bitten (ein
53. *djambé*	*wohan*	Betelnuß
54. *djamu*	*djampi*, K.I.: *loloh*	Medizin (zum Einnehmen)
55. *djaran*	*kapal*, K.I.: *titihan*	Pferd
56. *djeneng*	*nama*, K.I.: *asma*	Name

[1] Bitte eines Niedrigergestellten an einen Höherstehenden
[2] Bitte eines Höhergestellten an einen Niedrigerstehenden

Wörterverzeichnisse 127

57. *djero*	*lebet*	1. tief; 2. innen
58. *djeruk*	*djeram*	Citrusfrucht
59. *djungkat*	*serat*, K.I.: *pethat*	Kamm
60. *-djupuk*	*-pendhet*, K.I.: *-pundhut*	nehmen
61. *dluwang*	*dlantjang*	1. Baumrinde; 2. Papier
62. *dudu*	*dédé*, *sanès*	kein, keine, kein
63. *duwé*	*gadhah*, K.I.: *kagungan*	besitzen, haben
64. *èling*	*ènget*	sich erinnern
65. *emas*	*djené*	Gold
66. *embuh*	*kilap*, K.I.: *duka dalem*	nicht wissen
67. *énak*	*ètja*	angenehm, wohlschmeckend
68. *endhas*	*sirah*, K. I.: *mustaka*	Kopf, Haupt
69. *èndhèk*	*andhap*	niedrig
70. *endhog*	*tigan*	Ei
71. *endjet*	*apu*	gelöschter Kalk (zum Betelkauen)
72. *-enjang*	*-awis*	feilschen
73. *entèk*	*telas*	aufgebraucht, alle
74. *ésuk*	*éndjing*	Morgen
75. *gadhé*	*gantos*	Pfand
76. *gadjah*	*liman*	Elefant
77. *gamelan*	*gangsa*	Gamelan (djaw. Schlaginstrumentenorchester)
78. *gampang*	*gampil*	leicht, einfach
79. *ganep*	*djangkep*	vollzählig
80. *-gawa*	*-bekta*, K.I.: *-ampil*	bringen
81. *gawé*	*damel*	machen, tun
82. *gedhang*	*pisang*	Banane
83. *gedhé*	*ageng*	groß
84. *gegeman*	*dedamel*	Waffe
85. *gelem*	*purun*, K.I.: *kersa*	wollen; mögen
86. *gemak*	*pujuh*	Wachtel (Weibchen)

Eine mögliche Formalisierung ist:

$ZR_1 = \{\{M_1 \ldots M_i\} \in \{M_n\}, \{\{M_{1,\,5\,867}\} \rightarrow O_1 \in O_n\} \in \{M_{n\rightarrow}, I_1 \in \{I_n\}\}$

Bibliographie

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Herrfurth, Hans, Lehrbuch des modernen Djavanisch. 2. Aufl. Berlin (DDR) 1964

Walther, Elisabeth, Allgemeine Zeichenlehre. 2. Aufl. Stuttgart 1979

Zeichenrelationen auf der Basis bisimulativer Gleichungssysteme

1. Wie ich bereits in früheren Arbeiten gezeigt hatte, setzt Benses „verschachtelte“ Definition der Peirceschen Zeichenrelation (1979, S. 53)

$ZR^* = (M, ((M \rightarrow O), (M \rightarrow O \rightarrow I))$

eine Mengentheorie mit AFA (Anti-Fundierungsaxiom) voraus, da ZR* zirkulär ist. AFA (vgl. Aczel 1988) setzt ja als Basis-Axiom

$\Omega = \{\Omega\}$

voraus, denn wie man leicht sieht, haben wir in ZR*

$M \subset (M \subset O)$

$M \subset (M \subset O \subset I)$

$O \subset (M \subset O \subset I)$.

2. Ein interessanter Fall eines weiteren bisimulativen Systems findet man in Barwise und Moss (1996, S. 77):

$x = \{y\}$

$y = \{x, z\}$

$z = \{x\}$.

Wir setzen also

$M := x, O := y, I := z$

und erhalten zunächst entsprechend einfachem ZR = (M, O, I).

$ZR = \langle\{\{y\}, \{x, z\}, \{x\}\rangle$.

Wenn wir das neue System jedoch auf ZR* anwenden, bekommen wir die Verschachtelung

$ZR^* = \langle\{y\}, ((\{y\} \rightarrow \{x, z\}), \{\{y\} \rightarrow \{x, z\} \rightarrow \{x\}\}\rangle$.

Bibliographie

Aczel, Peter, Non-Well-Founded Sets. Stanford, CA, 1988

Barwise, Jon/Lawrence Moss, Vicious Circles. Stanford, CA, 1996

Bense, Max, Die U/nwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Mengentheoretische Zirkularität und semiotische Umgebungen

1. Aus dem AFA (Anti-Fundierungs-Axiom, cf. Aczel 1988)

$\Omega = \{\Omega\}$

folgt z.B (Barwise und Moss 1996, S. 77):

$x = \{y\}$

$y = \{x, z\}$

$z = \{x\}$.

Wir können also setzen

$M := x, O := y, I := z$

und erhalten zunächst entsprechend einfachem ZR = (M, O, I).

$ZR = <\{\{y\}, \{x, z\}, \{x\}>$.

Ferner erhalten wir für die vollständige „verschachtelte“ Zeichenrelation

$ZR^* = (M, ((M \rightarrow O), (M \rightarrow O \rightarrow I))$.

auf Grund von Bense (1979, S. 53):

$ZR^* = <\{y\}, ((\{y\} \rightarrow \{x, z\}), \{\{y\} \rightarrow \{x, z\} \rightarrow \{x\}\}>$.

2. Sowohl ZR als auch ZR* enthalten also keine Elemente, sondern nur Mengen bzw. semiotische „Elemente“ werden selbst als Mengen definiert. Aus

$x = \{y\}$ und

$z = \{x\}$

folgt nun aber auch

$z = \{\{y\}\}$,

d.h. die bereits in Toth (2010) eingeführte Umgebung von {y}:

$U\{y\} := \{\{y\}\}$.

Nun kann man auf die gleiche Weise wie oben semiotische Umgebungen für sämtliche Fundamentalkategorien definieren, denn das Barwise´sche bisimulative Gleichungssystem von oben lässt sich mit folgenden Alternativen formulieren:

	1. Var.	2. Var.	3. Var.
x =	{y}	{x}	{z}
y =	{x, z}	{y, z}	{x, y}
z =	{x}	{y}	{x}

Man bekommt somit

U{x} := {{x}}.

U{y} := {{y}}.

U{z} := {{z}}.

Solche Umgebungen sind nicht nur, wie bereits in zahlreichen Arbeiten nachgewíesen, von theoretischem Interesse, sondern z.B. innerhalb der verbalen Semiotik (Linguistik) im Bereich des sog. „Wortinhaltes“ (vgl. Leisi 1953), wenn wir etwa die Verben stecken, stechen, eindrücken, einhämmern, einschlagen usw. betrachten, die sich dadurch in ihrem Wortinhalt unterscheiden, dass das von ihnen präsupponierte Material, worin etwa „hineingetan“ wird, verschieden ist. So ist es bei stecken z.B. ein Nadelkissen, bei Stechen die Haut, bei eindrücken ein weiches Material, bei Hämmern z.B. Stein, bei Einschlagen auch Holz, usw., d.h. wir können hier die Qualitäten der Objekte als deren Umgebungen semiotisch definieren.

Bibliographie

Aczel, Peter, Non-Well-Founded Sets. Stanford, CA, 1988

Barwise, Jon/Lawrence Moss, Vicious Circles. Stanford, CA, 1996

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Eine bisimulative Definition der Zeichenrelation allein auf der Basis der leeren Menge

> Henoch wandelte mit Gott, und auf einmal war er nicht mehr da; denn Gott hatte ihn hinweggenommen.
>
> Genesis V 24

1. In dieser längeren Reihe kürzerer Beiträge zu einer mengentheoretischen Semiotik mit AFA (Antifundierungsaxiom) stelle ich hier im Anschluss an Benses Ausführungen zur Definition der Peano-Zahlenfolge auf der Basis eines einzigen Elementes mit Nachfolgerelation eine Definition der Peirceschen Zeichenrelation mit doppelter Bisimulation („Verschachtelung“) auf der Basis der leeren Menge als ihrem einzigen Element vor. (Dass dabei, streng genommen, die leere Menge als Element gar nicht auftritt, sondern nur die/eine Menge, die das leere Element enthält, ist im Grunde zweitrangig, es wird allerdings später darauf zurückzukommen sein.)

2. Wir gehen aus von dem folgenden bisimulativen Gleichungssystem:

0 = {0}

{0} = {{0}}

{{0}} = {{{0}}}

Nebenbei bemerkt, sind die Definitionen, die wir sogleich mit den Fundamentalkategorien identifizieren werden, insofern geradezu gemacht für die Semiotik, als M ja sowohl in O als auch I und O in I inkludiert sind. Wir bekommen also für

ZR = (M, O, I)

ZR = {{0}, {{0}}, {{{0}}}}

(Dass diese Definition nichts mit der Paarmengendefinition von Wiener-Kuratowksi zu tun hat, dürfte klar sein.)

Schliesslich erhalten wir für

ZR* = (M, ((M → O), (M → O → I)) (Bense 1979, S. 53)

$ZR^* = \{\{0\}, \{\{\{0\} \rightarrow \{\{0\}\}), \{\{0\} \rightarrow \{\{0\}\} \rightarrow \{\{\{0\}\}\}\}\}$

Bibliographie

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Zeichenrelationen aufgrund von Bisimulationsgleichungen für Kreations- und Kommunikationsschemata

1. Barwise und Moss (1996, S. 97) haben folgendes interessantes System bisimulativer Gleichungen vorgeschlagen:

x = {p, {p, x, y}, {q, x, z}}

y = {q, {p, x, y}, {y}}

z = {{q, x, z}},

worin p und q Urelemente sind, die aufgrund des für AFA-Systeme erforderlichen Axioms of Plenitude verwendet werden (Barwise/Moss 1996, S. 21 f.).

2. Das Peircesche Kreationsschema besagt, dass aus einer Erstheit als thetischem Repertoire durch eine Drittheit als hyperthetischem Regulationsprinzip eine hypothetische Zweitheit durch verdoppelte Selektion erzeugt bzw. realisiert wird:

.3.

.2.

.1.

Nun gilt aber wegen ZR = (M,O, I) dennoch (O $\subset$ I). Da natürlich auch M $\subset$ gilt, erfüllt also das obige Bisimulationssystem mit

M := y, I := x und O := z

die Anforderungen an das semiotische Kreationsschema:

x = {p, {p, x, y}, {q, x, z}}

z = {{q, x, z}}

y = {q, {p, x, y}, {y}}

3. Das semiotische Kommunikationsschema hat nach Bense (1971, S. 33 ff.) die folgende Ordnung des Primzeichenschemas:

$KR = (O \rightarrow M \rightarrow I)$.

Zu seiner Darstellung kann man sich z.B. eines Systems bisimulativer Gleichungen bedienen, welches Barwise und Moss (1996, S. 97) gegeben haben:

$x = \{p, x, y\}$

$y = \{q, x, z\}$

$z = \{y\}$.

Dann definieren wir:

$O := x$, $I := y$, $M := z$

Wegen $x \in x$ und $x \in y$ ist die Forderung der Existenz einer nicht-leeren Schnittmenge zwischen dem Sender- und dem Empfängerrepertoire gegeben. Wir haben dann entsprechend

$KR = (O \rightarrow M \rightarrow I)$.

$KR = (\{p, x, y\} \rightarrow \{y\} \rightarrow \{q, x, z\})$.

Bibliographie

Bense, Max, Zeichen und Design. Baden-Baden 1971

Barwise, Jon/Moss, Lawrence, Vicious Circles. Stanford, CA, 1996

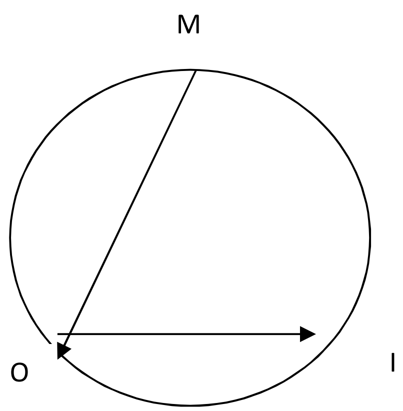
Zeichenrelationen von Bisimulativgeichungen mit leerer Menge und semiotische Diamanten

1. Zu „semiotischen Diamanten" vgl. Toth (2008, S. 177 ff.) und Kaehr (2008). Sie lassen sich sehr gut mit Hilfe von Kreismodellen darstellen, ähnlich wie dies Günther (1979) mit den Negationszyklen getan hatte. Wie in allen letzten Arbeiten gehen wir von Aczels (1988) Mengentheorie (ohne Plenituditäts-Axiom) aus und definieren:

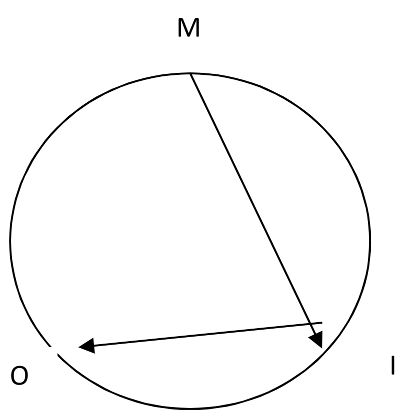
x = {{x}, Ø}, y = {{{x, y}}, Ø}, z = {{{{{x, y, z}}}}, Ø}

Da jede triadische Zeichenrelation 3! = 6 Permutationen hat, bekommen wir die im folgenden präsentierten 6 Darstellungen:

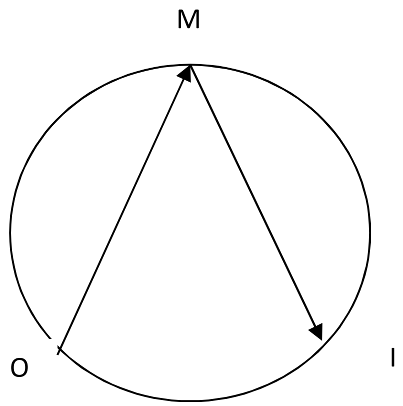
1. (M → O → I) := {{{x}, Ø}, {{{x, y}}, Ø}, {{{{{x, y, z}}}}, Ø}}



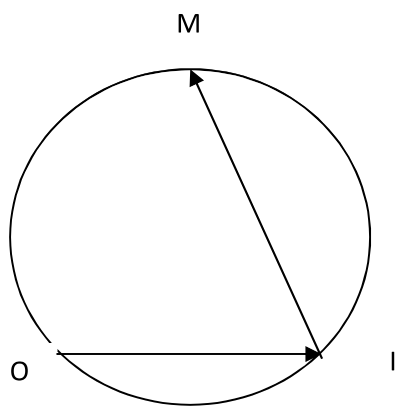
2. (M → I → O) := {{{x}, Ø}, {{{{{x, y, z}}}}, Ø}, {{{x, y}}, Ø}}



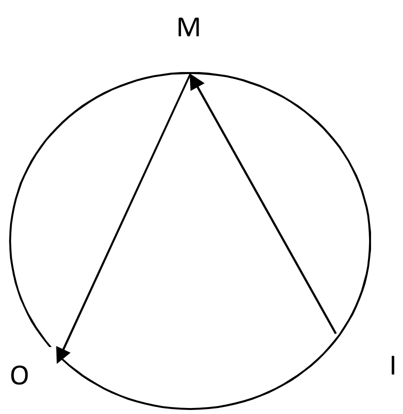
3. (O → M → I) :=   {{{{x, y}}, Ø}, {{x}, Ø}, {{{{{x, y, z}}}}, Ø}}



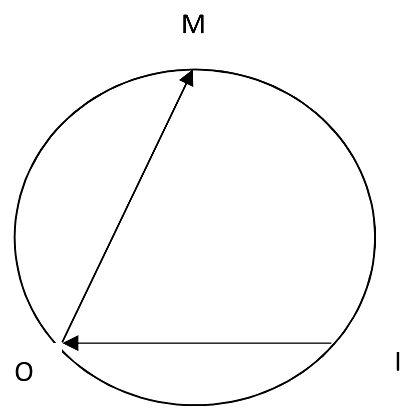
4. (O → I → M) :=   {{{x, y}}, Ø}, {{{{{x, y, z}}}}, Ø}, {{x}, Ø}}



5. (I → M → O) :=   {{{{{{x, y, z}}}}, Ø}, {{x}, Ø}, {{{x, y}}, Ø}}



6. (I → O → M) := {{{{{{x, y, z}}}}, Ø}, {{{x, y}}, {{x}, Ø}}



Bibliographie

Aczel, Peter, Non-Well-Founded Sets. Stanford, CA, 1988

Günther, Gotthard, Beiträge zur Grundlegung einer operationsfähigen Dialektik. 2 Bd. Hamburg 1979

Kaehr, Rudolf, Toth's semiotic diamonds. http://www.thinkartlab.com/pkl/lola/Toth-Diamanten/Toth-Diamanten.pdf (2008)

Toth, Alfred, Semiotische Strukturen und Prozesse. Klagenfurt 2008

Zum Verhältnis von Relations- und Stufenüberschuss

1. Wie zuletzt in Toth (2010) dargestellt, verstehen wir unter den semiotischen Stufenzahlen jene Zahlen, welche den Überschuss des Verhältnisses semiotischer Relationen auf der Basis der Fibonacci- und der Peano-Zahlenfolge angeben. Die Idee, neben der Relation auch den Begriff der Stufe in die Semiotik einzuführen, ergibt sich direkt aus der Einsicht, dass die übliche Peircesche Zeichenrelation

ZR = (M, O, I)

in dieser Form völlig ungenügend ist und dass daher bereits Bense (1979, S. 53) von der viel präziseren Relation

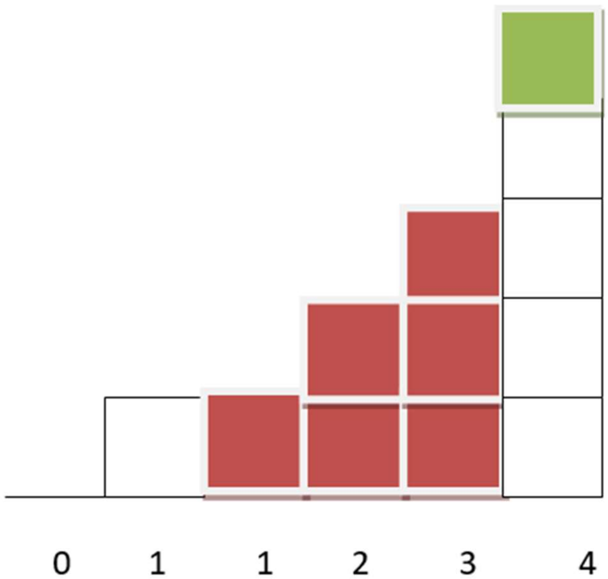
ZR* = (M, ((M → O), (M → O → I))

ausgegangen war. Nur stellt sich beim Übergang von ZR zu ZR* ein grosses Problem ein: ZR* ist, wie man sofort sieht, zirkulär. Will man also ZR* weiterhin in einer monokontexturalen Semiotik behandeln, muss man zu einer Mengentheorie ausweichen, in welcher das Fundierungsaxiom ausser Kraft gesetzt ist. Hier gibt es heute im wesentlichen zwei Modelle: Das ursprüngliche, wunderbar einfache und so mächtige Modell von Aczel (1988) mit AFA (Anti-Fundierungs-Axiom) und das erweiterte, hochgradig komplexe, aber auch etwas weniger „elegante“ Modell mit AFA und Plenituditätsaxiom von Barwise und Moss (1996).

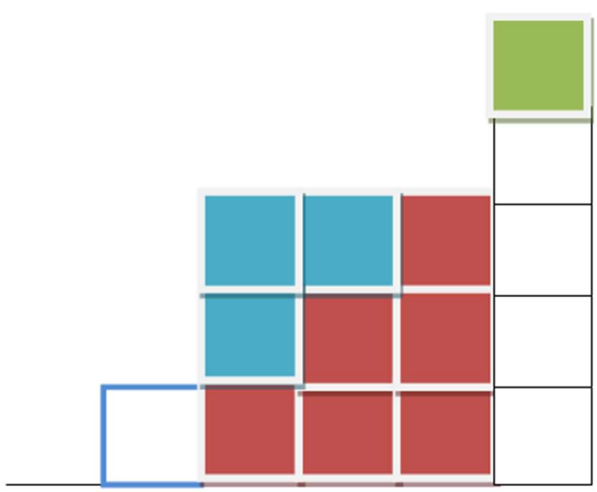
2. Wie bereits früher gezeigt, besteht das wesentliche Moment in einer ZEICHEN-Relation im Gegensatz zu einer anderen dreistelligen Relation („Fritz gibt Hans ein Buch“, „Zürich liegt zwischen St. Gallen und Basel“, usw.) darin, dass die Relation GESTUFT ist, d.h, VERSCHACHTELT, und dies bedingt eben zirkuläre Definitionen der Fundamentalkategorien auf der Basis des Anti-Fundierungsaxiomns:

$\Omega = \{\Omega\}$.

Bei einer ternären Relation kann mindesens zwischen dem Treppen-, dem Eskalator- und dem Lift-Modell unterscheiden, wenigstens solange man als Basis der Relationszahlen die Peano-Zahlen heranzieht. Nimmt man jedoch die Fibonacci-Zahlen, ergibt sich als weiteres das Turmmodell:



Im obigen Modell ist ZR* rot eingezeichnet, wir haben also ein Treppenmodell als seine Basis. Bis und mit R(n) = 3 sind Peano- und Fibonacci-Zahlen identrisch, jedoch haben wir für PZ = 4 FZ = 5, d.h. die Treppe wächst sozusagen um eine Stufe zu viel (grün). Dieser Stufenüberschuss liegt nun aber auch nicht in der Komplementärmenge des roten Bereichs, den wir im folgenden Bild blau einzeichnen:



Bei R(n) = 5 beträgt dann der Stufenüberschuss bereits SZ = 3, bei R(n) = 6 ist er SZ = 7, usw.:

FZ	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	...
R(n)	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
SZ	**1**	**3**	**7**	**14**	**26**	**46**	**79**	**133**	**221**	**364**	**...**

Die SZ entgehen also stark progressiv (nicht-linear) den linear progressiven R(n)´s. Dagegen ist der Relationsüberschuss, wie bereits angetönt, die komplementäre Menge zu den Quadraten über den R(n)´s, und es gilt

$SZ(n) \not\subset (R(n))^2$

d.h. aber, die Stufenüberschüsse sind regelrecht transzendent, denn sie liegen ja im Nirgendwo, d.i. ausserhalb des durch C(ZR) definierten semiotischen Zahlenfeldes. Die semiotischen Stufenzahlen SZ(n) sind für n ≥ 4 transzendente Zahlen und daher semiotisch äquivalent zu den nicht-semiotischen transzendenten Zahlen wie π, e, der Liouville-Zahl, der Gelfand-Schneider-Potenz usw.

Bibliographie

Aczel, Peter, Non-Well-Founded sets. Stanford, CA, 1988

Barwise, John/Lawrence Moss, Vicious Circles. Stanford, CA, 1996

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Toth, Alfred, Treppe, Eskalator, Lift. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2010

Eine Zeichenrelation, basierend auf der Folge der Fibonacci-Zahlen

1. Dass die bekannte Peircesche Zeichenrelation auf den Peano-Zahlen, den sog. Primzeichen (Bense 1980), basiert, ist so selbstverständlich, dass man es gar nicht als Einschränkung empfindet. Natürlich kann man aber statt der Peano-Folge irgendeine Zahlenfolge nehmen; das Ergebnis wird niemals trivial ausfallen.

2. Wir waren deshalb in unseren letzten Arbeiten, z.B. Toth (2010), von der Folge der Fibonacci-Zahlen

FZ = 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

ausgegangen. Während das n-te Glied der Peano-Zahlen immer um den Wert 1 grösser ist als das (n-1)-te, stellt das n-te Glied der Fibonacci-Zahlen die Summe der beiden Vorgängerzahlen dar.

3. Wird gehen nun bewusst so vor, dass wir die kategoriale Nullheit nach Bense (1975, S. 65 f.) in die ZR einbetten und nach einem Vorschlag Kaehrs (2008) die relationale Erstheit als Dublette einführen. Dann bekommen wir genau, was wir wollen

ZR_F = (0.a 1.b 1.c 2.d 3.e).

4. Da nun sowohl ZR_P als auch ZR_F auf einer Zahlenfolge mit partieller Inklusion der Vorderglieder in das n-te Glied definiert sind, benötigen wir als mengentheoretische Basis eine Mengentheorie mit Anti-Fundierungsaxiom und/oder Plenituditätsaxiom.

4.1. Das erste System von bisimulativen Gleichungen basiere auf einer Mengentheorie mit AFA allein; die Definition sollen bereits die Inklusionsverhältnisse abbilden. Dann können wir z.B. folgendes System aufstellen:

0 = <0>

1 = {{1}, {1}} bzw. {<1, 1>}

2 = {{{2}}}

3 = {{{{3}}}}

Wir haben dann

$ZR_F = \{<0>, \{<1, 1>\}, \{\{\{2\}\}\}, \{\{\{\{3\}\}\}\}\}$

bzw. in Analogie zu

$ZR_{F^*} = ((0, ((1 \leftrightarrow 1), ((1 \rightarrow 2), (2 \rightarrow 3))))$

haben wir

$ZR_{F^*} = \{\{<0>, ((\{\{1\}, \{1\}\}), ((\{\{1\}, \{1\}\} \rightarrow \{\{\{2\}\}\}), (\{\{\{2\}\}\} \rightarrow \{\{\{\{3\}\}\}\}\}\}$

4.2. Das zweie System von bisimulativen Gleichungen basiere auf einer Mengentheorie mit AFA und Urelement. Da wir im relationalen Rahmen unserer Zeichenrelation bleiben, setzen wir für das Urelement p jedoch einen Wert aus {x, y, z, w} ein, z.B. x. Dann können wir z.B. folgendes System aus Barwise/Moss (1996, S. 78) benutzen:

$x = \{y, z, w\}$

$y = \{p, w\}$

$z = \{w\}$

$w = \{z, w\}$

Wir haben dann

$ZR_F = \{\{y, z, w\}, \{\{x, w\}, \{x, w\}\}, \{w\}, \{z, w\}\}$

und

$ZR_{F^*} = \{\{<x, z, w>, \{\{\{\{x, w\}, \{x, w\}\}\}, \{\{\{\{x\}, \{w\}\} \rightarrow \{\{\{w\}\}\}\}, (\{\{\{w\}\}\} \rightarrow \{\{\{\{z, mw\}\}\}\}\}$

Bibliographie

Barwise, John/Moss, Lawrence, Vicious Circles. Cambridge 1996

Bense, Max, Die Einführung der Primzeichen. In: Ars Semeiotica III,3, 1980

Toth, Alfred, Zum Verhältnis von Relations- und Stufenüberschuss. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2010

Transzendente semiotische Zahlen

1. Bekanntlich versteht man unter einer transzendenten Zahl eine komplexe Zahl, die keine Lösung einer algebraischen Gleichung darstellt. Bekannte Beispiele sind π, e, die Liouville-Zahl, die Gelfand-Schneider-Potenz, sin(1) usw.

2. Um klarzumachen, was eine transzendente semiotische Zahl ist, befreien wir zuerst die Peircesche Zeichenrelation

ZR = (M, O, I)

von einer kaum bedachten Einschränkung, nämlich die Bindung ihrer zahlentheoretischen Basis (sowie ihrer Morphismen, d.h. Benses „generativer" und „degenerativer Semiosen" und „Retrosemiosen") auf die Peano-Zahlen (vgl. Bense 1975, S. 167 ff., 1981, S. 17 ff., 1983, S. 192 ff.). Wir wollen, zunächst willkürlich, anstelle der Peano-Zahlen die Fibonacci-Zahlen verwenden (in Wahrheit kommt die Motivation dazu aus der Einführung der semiotischen Stufenzahlen sozusagen Vorläufer der transzendenten semiotischen Zahlen). Man vgl. die unterschiedlichen Folgen:

PZ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
FZ	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	...

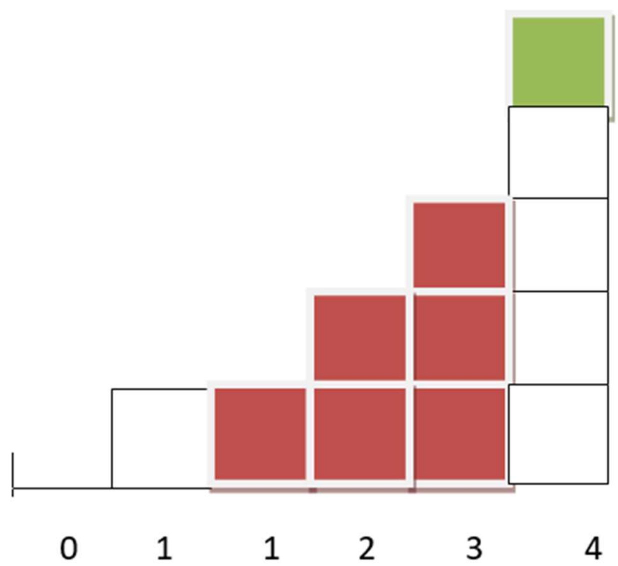
Geht an der Einfachheit halber von PZ \ {0} und FZ \ {0, 1} aus:

PZ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
FZ	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	...,

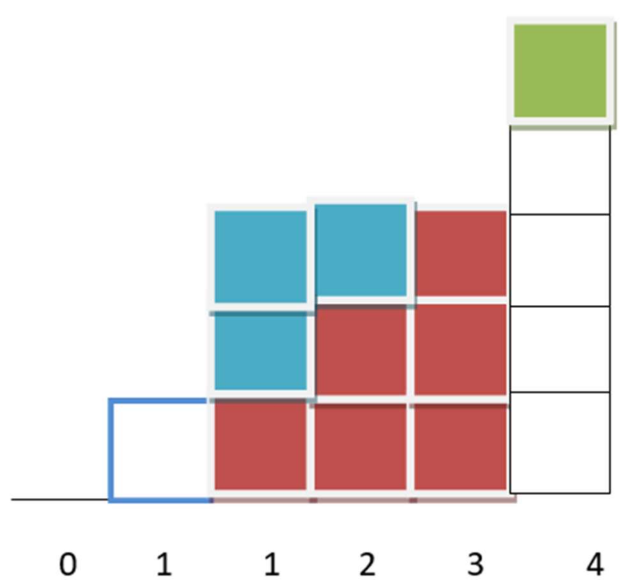
so erkennt man, dass gilt

PZ(n) ≠ FZ(n) für n ≥ 4

Wir wollen das einmal für RZ(n) mit n ≤ 4 aufzeichnen:



Im obigen Modell ist ZR* rot eingezeichnet, wir haben also ein Treppenmodell als seine Basis. Bis und mit R(n) = 3 sind Peano- und Fibonacci-Zahlen identrisch, jedoch haben wir für PZ = 4 FZ = 5, d.h. die Treppe wächst sozusagen um eine Stufe zu viel (grün). Dieser Stufenüberschuss liegt nun aber auch nicht in der Komplementärmenge des roten Bereichs, den wir im folgenden Bild blau einzeichnen:



Bei R(n) = 5 beträgt dann der Stufenüberschuss bereits SZ = 3, bei R(n) = 6 ist er SZ = 7, usw.:

FZ	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	...
R(n)	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
SZ	**1**	**3**	**7**	**14**	**26**	**46**	**79**	**133**	**221**	**364**	**...**

Die SZ entgehen also stark progressiv (nicht-linear) den linear progressiven R(n)´s. Dagegen ist der Relationsüberschuss, wie bereits angetönt, die komplementäre Menge zu den Quadraten über den R(n)´s, und es gilt

$SZ(n) \not\subset (R(n))^2$

d.h. aber, **die Stufenüberschüsse sind transzendent**, denn sie liegen ja im Nirgendwo, d.i. ausserhalb des durch C(ZR) definierten semiotischen Zahlenfeldes. **Die semiotischen Stufenzahlen SZ(n) sind für n ≥ 4 transzendente Zahlen und daher semiotisch äquivalent zu den nicht-semiotischen transzendenten Zahlen.**

Was für welche und wie viele transzendente semiotische Zahlen es gibt, muss zuerst erforscht werden; dass dies zu semiotisch völlig neuen Zahlenbereichen führt, ja die gesamte Semiotik in ein neues zahlentheoretisches Licht wirft, kann man sich bereits vorstellen.

Bibliographie

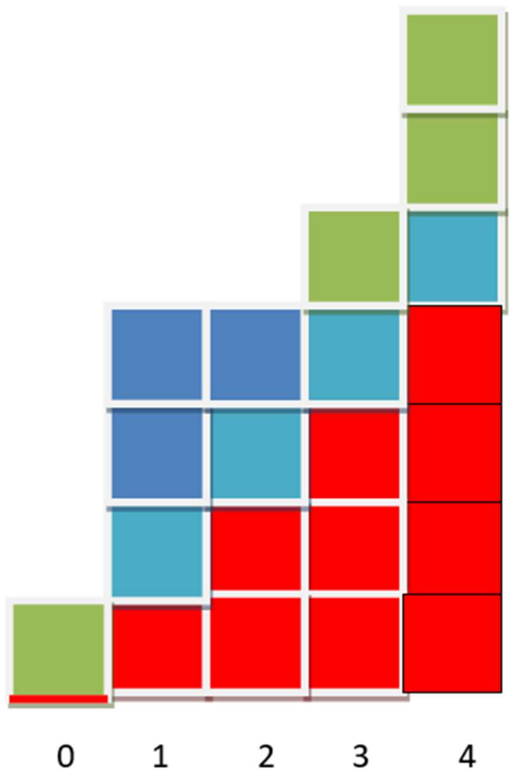
Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1975

Bense, Max, Axiomatik und Semiotik. Baden-Baden 1981

Bense, Max, Das Universum der Zeichen. Baden.-Baden 1983

Was ist unterhalb der Transzendenz?

1. Wir wollen von den in dem folgenden Bild dargestellten Relationen ausgehen



Die rote Relation ist eine pentadische Relation

$^{5}R = (^{0}0, {}^{1}1, {}^{2}2, {}^{3}3, {}^{4}4)$,

und zwar ist sie definierbar über einem System bisimulativer Gleichungen einer Mengentheorie mit Anti-Fundierungsaxiom (vgl. Aczél 1988):

0 = {0}

1 = {{0}, {{1}}}

2 = {{0}, {{1}}, {{{2}}}}

3 = {{0}, {{1}}, {{{2}}}}, {{{{3}}}}}

4 = {{0}, {{1}}, {{{2}}}}, {{{{3}}}}, {{{{{4}}}}}}.

Vereinfacht ist also ^5R eine total-inklusive („verschachtelte“ oder „Basbuschka“-Relation)

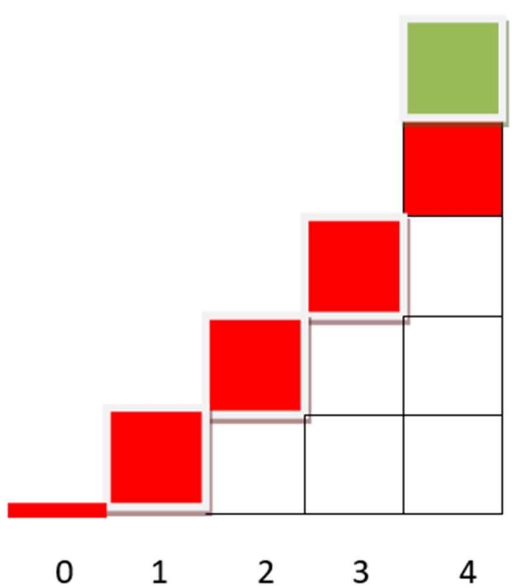
$^5R = (^00 \subset ((^11 \subset {}^22) \subset (({}^22 \subset {}^33))) \subset (({}^33 \subset {}^44))))),$

bzw. ein Ausschnitt aus einem theoretisch unendlichen „Stream“

$^5R = (^00, (^11,({}^2 2,({}^33, ({}^44)))) \ldots .$

2. Die dunkelblauen und grünblauen (hellblauen) Punkte ergeben die zur Relation ^5R komplementäre Relation $C(^5R)$. Eine Teilmenge von ihr, die im Bild grünblau erscheinen sollte, zuzüglich der grünen Punkte bildet die Menge der in Toth (2010b) eingeführten Relation der Stufenwerte oder Stufenüberschüsse, wie sie sich dann ergeben, wenn man die Peircesche Zeichenrelation statt auf den Peano-Zahlen (0, 1, 2, 3, ...) z.B. auf der Folge der Fibonacci-Zahlen (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...) aufbaut. Dann besteht z.B. an der Stelle RZ = 4 ein Relationsüberschuss von SZ = 3 und bei RZ = 3 ein Relationsüberschuss von RZ= 2, sonst beträgt er im eingezeichneten Bereich 0.

3. Nun wurde aber bereits in Toth (2010a) gezeigt, dass die drei Hauptmodelle inklusionaler Relationen das Treppen-, das Eskalator- und das Liftmodell sind. Schauen wir uns also z.B. das folgende, zweite Bild an:



Hier bilden die weissen Punkte UNTERhalb der roten Stufen-Relation eine zur Transzendenz OBERhalb quasi komplementäre Relation. In dem vorliegenden Fall ergibt sie sich als Subtraktion der roten Relation in Bild 2 von der roten Relation in Bild 3, sie enthält also all jene Punkte, welche bei der Progression der Peano-Zahlen in Bild 2 von der roten Punkte beim Schritt von einem Punkt n zu einem Punkt (n+1) NICHT inkludiert wird. Das Eskalatormodell besteht aus der roten Relation in Bild 2 plus einer Teilmenge der weissen Punkte in Bild 2. Die beiden Transzenendenzen, die obere in Bild 1 und die untere in Bild 2, verhalten sich also wie die in Himmel und Hölle „gespaltene“ Transzendenz in der Bonaventuraschen Lichtmetaphysik. Sie stellen also eine auf zwei Sphären „dividierte“ Transzendenz dar. Die obere ist die Transzendenz der unteren, und die untere ist die Transzendenz der oberen, es handelt sich um das duale Verhältnis von Transzendenz und Immanenz.

Bibliographie

Aczel, Peter, Non-Well-Founded Sets. Stanford, CA, 1988

Toth, Alfred, Treppe, Stufe und Eskalator. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2010a

Toth, Alfred, Transzendente semiotische Zahlen. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2010b

Die inklusive mono- und polykontexturale Zeichendefinition

1. Nach Bense genügt die übliche Peircesche Zeichenrelation

ZR = (M, O, I)

nicht, da damit die sog. Zeichenfunktionen nicht in die Definition eingehen. Bense hatte deshalb bereits in seiner Grundlegung einer automatentheoretischen Semiotik (1971, S. 42) die folgende, um die Bezeichnungsfunktion o und die Bedeutungsfunktion i erweiterte Definition gegeben:

ZR* = (M, O, I, o, i).

Indessen krank auch diese Definition daran, dass die Zeichenfunktionen zusammen mit den Kategorien Inklusionsrelationen bilden. Bense (1979, S. 53) hatte deshalb die folgende vollständige Zeichendefinition vorgeschlagen:

ZR*** = (M, ((M → O), (M → O → I))).

Man sollte allerdings nicht vergessen zu bemerken, dass zur Darstellung von ZR*** im Gegensatz zu ZR* und ZR** eine gewöhnliche Mengentheorie wie etwa diejenige von Zermelo-Fraenkel nicht mehr ausreicht, da ZR*** unendliche Regresse (Mirimanoff-Serien) nach sich zieht und somit sehr schnell in Paradoxen verendet. Innerhalb der Monokontexturalität kann man das Problem z.B. damit lösen, dass das Aczelsche Anti-Fundierungsaxiom einsetzt oder „Urelemente“ definiert (vgl. Toth 2010 und weitere Arbeiten).

2. In der Polykontexturalität ist es hingegen natürlich nicht nötig, sich vor Paradoxien zu hüten, die ja an die Monokontexturalität gebunden sind. Trotzdem empfiehlt es sich, die inklusorische Zeichendefinition beizubehalten und von ZR*** anstatt von ZR*/ZR** auszugehen. Man kann nun ZR*** sehr einfach dadurch mit der Polykontexturalitätstheorie kompatibel machen, dass man die sog. semiotische Diamantendefinition von Kaehr (2008)

Diam(ZR) = ((A | a), (A → B | c), (A → B → C | $b_2 \leftarrow b_1$)

als Inklusionsrelation, d.h. als „Relation über Relationen“, wie Bense sich ausdrückte, definiert:

M := (M | m)

$O := (M \rightarrow O \mid m \leftarrow o)$

$I := (M \rightarrow O \rightarrow I \mid I \leftarrow o \leftarrow m)$

Damit erhalten wir

$ZR^{****} = ((M \mid m), ((M \mid m) \rightarrow ((M \rightarrow O \mid m \leftarrow o), (M \mid m) \rightarrow (M \rightarrow O \mid m \leftarrow o) \rightarrow (M \rightarrow O \rightarrow I \mid I \leftarrow o \leftarrow m)))$.

Bibliographie

Bense, Max, Zeichen und Design. Baden-Baden 1971

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Kaehr, Rudolf, Sketch on semiotics in diamonds. Glasgow 2008

Toth, Alfred, Eine neue semiotische Matrix mit AFA. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2010

Zeichenrelationen über einem bisimulativen Gleichungssystem mit leeren Mengen anstatt Urelementen

1. Wir gehen aus von dem folgenden bisimulativen Gleichungssystem:

x = {{x}, Ø}

y = {{{x, y}}, Ø}

z = {{{{{x, y, z}}}}, Ø}

Hier ist also die progressive Inklusion der n.-heit in der (n+1).heit im Gegensatz zu den meisten bisher behandelten Fällen vorgegeben. Ferner ergibt sich durch die Wahl von Ø anstatt von Urelementen (vgl. Barwise/Moss 1996, S. 21 ff., sog., Plenituditätsaxiom) jeweils die Möglichkeit, dass eine semiotische Kategorie nicht besetzt ist, so dass also auch die von mir schon vor Jahren behandelten Zeichen ohne Mittel- (z.B. Gestik, Mimik, Kinesik, Proxemik), Objekt- (z.B. imaginäre Objekte) sowie Interpretantenbezug (z.B. Zeichen, deren Wahrheitswerte nicht nachprüfbar sind, etwa solche der temporalen Logik, usw) nicht mit Tricks erklärt werden müssen.

2. Zunächst erhalten wir also für

ZR = (M, O, I)

ZR = ({{x}, Ø}, {{{x, y}}, Ø}, {{{x, y}}, Ø})

und hernach für Benses „Verschachtelung“:

ZR* = (M, ((M → O), (M → O → I)))

den folgenden Ausdruck

ZR* = ({{x}, Ø}, (({{x}, Ø} → {{{x, y}}, Ø}), ({{x}, Ø} → {{{x, y}}, Ø} → {{{{{x, y, z}}}}, Ø}))).

Da das bisimulative ZR* genau die verschachtelten Zeichenstrukturen fortführt, können wir einsetzen:

ZR* = ({{{{x}, Ø}}, Ø}, (({{{{x}, Ø}}, Ø} → {{{{{x}, Ø}, {{{x, y}}, Ø}}}, Ø}), ({{{{x}, Ø}}, Ø} → {{{{{x}, Ø}, {{{x, y}}, Ø}}}, Ø} → {{{{{{{x}, Ø}, {{{x, y}}, Ø}, {{{{{x, y, z}}}}, Ø}}}}}, Ø}))).

Dieser Ausdruck gehört also der semiotischen 1. Stufe an. Wir können nun entweder die 2. Stufe durch erneute Einsetzung bilden:

ZR* = ({{{{{{x}, Ø}}, Ø}}, Ø}, (({{{{{{x}, Ø}}, Ø}}, Ø} → {{{{{{{x}, Ø}}, Ø}, {{{x, y}}, Ø}}}, Ø}), ({{{{{{x}, Ø}}, Ø}}, Ø} → {{{{{{{x}, Ø}}, Ø}, {{{{{x}, Ø}, y}}, Ø}}}, Ø} → {{{{{{{x}, Ø}, {{{x, y}}, Ø}, {{{{{x, y, z}}}}, Ø}}}}}}, Ø}))), usw. usque ad infinitum,

oder einfach x-, y-, z-Ströme herstellen (vgl. Barwise/Moss 1986; , S. 1977):

ZR* = ({{{{x}, Ø}}, Ø}, (({{{{x}, Ø}}, Ø} → {{{{{x}, Ø}, y}}, Ø}), ({{{{x}, Ø}}, Ø} → {{{{{x}, Ø}, y}}, Ø} → {{{{{{{x}, Ø}, y, z}}}}, Ø}))) (Anfang eines x-Stroms)

ZR* = ({{x}, Ø}, (({{x}, Ø} → {{{x, {{{x, y}}, Ø}}}, Ø}), ({{x}, Ø} → {{{x, {{{x, y}}, Ø}}}, Ø} → {{{{{x, {{{x, y}}, Ø}, z}}}}, Ø}))) (Anfang eines y-Stroms)

ZR* = ({{x}, Ø}, (({{x}, Ø} → {{{x, y}}, Ø}), ({{x}, Ø} → {{{x, y}}, Ø} → {{{{{x, y, {{{{{x, y, z}}}}, Ø}}}}}}, Ø}))) (Anfang eines z-Stroms).

Bibliographie

Barwise, Jon/Moss, Lawrence, Vicious Circles. Cambridge, CA, 1996

Peircesche AFA-Semiotik auf der Basis surrealer Zahlen

1. Wir versuchen hier, wie bereits in Toth (2011), eine Semiotik mit Antifundierungsaxiom, jedoch diesmal mit Hilfe der von Conway und Guy (1996, S. 283 ff.) eingeführten surrealen Zahlen einzuführen. Da jede surreale Zahl auf verschiedene Weisen definiert werden kann, setzen wir fest:

1 := {0 | }

2 := {1 | }

3 := {2 | }

Anmerkung: Wir setzen hier also die Nullheit voraus, wobei wir uns auf Bense (1975, S. 65 ff.) und in seiner Nachfolge auf einige Arbeiten Stiebings berufen. Wir tun dies deshalb, weil wir damit eine gewisse Symmetrie in die Definition der drei Fundamentalkategorien als surreale Zahlen bringen (sie stehen alle rechts vom Strich, der den Unterschied markiert). Natürlich kann man aber auch z.B. 1 := { | 2} definieren, d.h. durch die Leerheit links des Unterschieds.

2. ZR = ({0 | }, {1 | }, {2 | })

Nun ist

{0 | } = {0 | }

{1 | } = ({0 | }→{1 | })

{2 | } = ({1 | }→{2 | }),

also

ZR = ({0 | }, (({0 | }→{1 | }), ({1 | }→{2 | }))).

Es ist aber auch

({1 | }→{2 | }) = (({0 | }→{1 | }), ({1 | }→{2 | })) = ({0 | }→{1 | }→{2 | }),

damit haben wir

ZR = ({0 | }, (({0 | }→{1 | }), ({0 | }→{1 | }→{2 | }))).

Da

({0 | }→{1 | }→{2 | }) = ZR,

gilt in Sonderheit

$ZR = (\{0 \mid \}, ((\{0 \mid \} \rightarrow \{1 \mid \}), ZR)),$

d.h. $ZR \subset ZR$.

Hieraus folgt

$(\{0 \mid \}, \{1 \mid \}, \{2 \mid \}) \subset (\{0 \mid \}, \{1 \mid \}, \{2 \mid \})$

und speziell

$\{0 \mid \} \subset (\{0 \mid \} \rightarrow \{1 \mid \}) \subset (\{0 \mid \} \rightarrow \{1 \mid \} \rightarrow \{2 \mid \})$

$\{1 \mid \} \subset (\{0 \mid \} \rightarrow \{1 \mid \}) \subset (\{0 \mid \} \rightarrow \{1 \mid \} \rightarrow \{2 \mid \})$

$\{0 \mid \} \subset (\{0 \mid \} \rightarrow \{1 \mid \}) \subset \{2 \mid \} \subset (\{0 \mid \} \rightarrow \{1 \mid \} \rightarrow \{2 \mid \})$

$\{1 \mid \} \subset (\{0 \mid \} \rightarrow \{1 \mid \}) \subset \{2 \mid \} \subset (\{0 \mid \} \rightarrow \{1 \mid \} \rightarrow \{2 \mid \})$

und wegen $\{2 \mid \} = (\{0 \mid \} \rightarrow \{1 \mid \} \rightarrow \{2 \mid \})$

$\{0 \mid \} \subset (\{0 \mid \} \rightarrow \{1 \mid \}) \subset \{2 \mid \}$

$\{1 \mid \} \subset (\{0 \mid \} \rightarrow \{1 \mid \}) \subset \{2 \mid \}$

sowie wegen $(\{0 \mid \} \rightarrow \{1 \mid \} \rightarrow \{2 \mid \}) = ZR$

$\{0 \mid \} \subset (\{0 \mid \} \rightarrow \{1 \mid \}) \subset ZR$

$\{1 \mid \} \subset (\{0 \mid \} \rightarrow \{1 \mid \}) \subset ZR.$

und somit

$\{0 \mid \} \subset \{1 \mid \}.$

Damit kann man getrost die Morphismen durch die Inklusionen ersetzten. Sämtliche semiotischen Abbildungen sind damit Morphismen. Ferner ist jede Kategorie der Stufe (n-1) eine Abkürzung für $((n-1) \subset n)$. Das ist nichts anderes als Benses Definition der Subzeichen in ihrer Janusgesichtigkeit zwischen statischen „Momenten“ und dynamischen „Semiosen“.

2. Gehen wir also wieder aus von

1. $ZR = (\{0 \mid \}, \{1 \mid \}, \{2 \mid \}),$

dann können wir streng rekursiv verschiedene Mirimanoff-Serien konstruieren, z.B. durch {2 | } → ({0 | }, {1 | }, {2 | }) (mit Numerierung der Stufen):

2. ({0 | }, {1 | }, ({0 | }, {1 | }, {2 | }))

3. ({0 | }, {1 | }, ({0 | }, {1 | }, ({0 | }, {1 | }, {2 | })))

4. ({0 | }, {1 | }, ({0 | }, {1 | }, ({0 | }, {1 | }, ({0 | }, {1 | }, {2 | }))))

5. ({0 | }, {1 | }, ({0 | }, {1 | }, ({0 | }, {1 | }, ({0 | }, {1 | }, ({0 | }, {1 | }, {2 | })))))

6. ({0 | }, {1 | }, ({0 | }, {1 | }, ({0 | }, {1 | }, ({0 | }, {1 | }, ({0 | }, {1 | }, ({0 | }, {1 | }, {2 | }))))))

7. ({0 | }, {1 | }, ({0 | }, {1 | }, ({0 | }, {1 | }, ({0 | }, {1 | }, ({0 | }, {1 | }, ({0 | }, {1 | }, ({0 | }, {1 | }, {2 | })))))))

8. ({0 | }, {1 | }, ({0 | }, {1 | }, ({0 | }, {1 | }, ({0 | }, {1 | }, ({0 | }, {1 | }, ({0 | }, {1 | }, ({0 | }, {1 | }, ({0 | }, {1 | }, {2 | }))))))))

9. ({0 | }, {1 | }, ({0 | }, {1 | }, ({0 | }, {1 | }, ({0 | }, {1 | }, ({0 | }, {1 | }, ({0 | }, {1 | }, ({0 | }, {1 | }, ({0 | }, {1 | }, ({0 | }, {1 | }, {2 | })))))))))

10. 9. ({0 | }, {1 | }, ({0 | }, {1 | }, ({0 | }, {1 | }, ({0 | }, {1 | }, ({0 | }, {1 | }, ({0 | }, {1 | }, ({0 | }, {1 | }, ({0 | }, {1 | }, ({0 | }, {1 | }, ({0 | }, {1 | }, {2 | }))))))))))

…

oder durch {1 | } → ({1 | }, {2 | }) und {2 | } → ({0 | } ,{1 | }, {2 | })

2. ({0 | }, ({1 | }, {2 | }), ({0 | }, ({1 | }, {2 | }), {2 | }))

3. ({0 | }, ({1 | }, {2 | }), ({0 | }, ({1 | }, {2 | }), ({0 | }, ({1 | }, {2 | }), {2 | })))

4. ({0 | }, ({1 | }, {2 | }), ({0 | }, ({1 | }, {2 | }), ({0 | }, ({1 | }, {2 | }), ({0 | }, ({1 | }, {2 | }), {2 | }))))

5. ({0 | }, ({1 | }, {2 | }), ({0 | }, ({1 | }, {2 | }), ({0 | }, ({1 | }, {2 | }), ({0 | }, ({1 | }, {2 | }), ({0 | }, ({1 | }, {2 | }), {2 | })))))

6. ({0 | }, ({1 | }, {2 | }), ({0 | }, ({1 | }, {2 | }), ({0 | }, ({1 | }, {2 | }), ({0 | }, ({1 | }, {2 | }), ({0 | }, ({1 | }, {2 | }), ({0 | }, ({1 | }, {2 | }), {2 | }))))))

7. ({0 | }, ({1 | }, {2 | }), ({0 | }, ({1 | }, {2 | }), ({0 | }, ({1 | }, {2 | }), ({0 | }, ({1 | }, {2 | }), ({0 | }, ({1 | }, {2 | }), ({0 | }, ({1 | }, {2 | }), ({0 | }, ({1 | }, {2 | }), {2 | })))))))

8. ({0 | }, ({1 | }, {2 | }), ({0 | }, ({1 | }, {2 | }), ({0 | }, ({1 | }, {2 | }), ({0 | }, ({1 | }, {2 | }), ({0 | }, ({1 | }, {2 | }), ({0 | }, ({1 | }, {2 | }), ({0 | }, ({1 | }, {2 | }), ({0 | }, ({1 | }, {2 | }), {2 | }))))))))

9. ({0 | }, ({1 | }, {2 | }), ({0 | }, ({1 | }, {2 | }), ({0 | }, ({1 | }, {2 | }), ({0 | }, ({1 | }, {2 | }), ({0 | }, ({1 | }, {2 | }), ({0 | }, ({1 | }, {2 | }), ({0 | }, ({1 | }, {2 | }), ({0 | }, ({1 | }, {2 | }), ({0 | }, ({1 | }, {2 | }), {2 | })))))))))

10. 9. ({0 | }, ({1 | }, {2 | }), ({0 | }, ({1 | }, {2 | }), ({0 | }, ({1 | }, {2 | }), ({0 | }, ({1 | }, {2 | }), ({0 | }, ({1 | }, {2 | }), ({0 | }, ({1 | }, {2 | }), ({0 | }, ({1 | }, {2 | }), ({0 | }, ({1 | }, {2 | }), ({0 | }, ({1 | }, {2 | }), ({0 | }, ({1 | }, {2 | }), {2 | }))))))))))

…

Bibliographie

Conway, John Horton/Richard K. Guy, the Book of Numbers. New York 1996

Toth, Alfred, Droste-Effekt bei präsuppositiven Zeichenklassen. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2011

Präsupponierte Zeichenrelationen

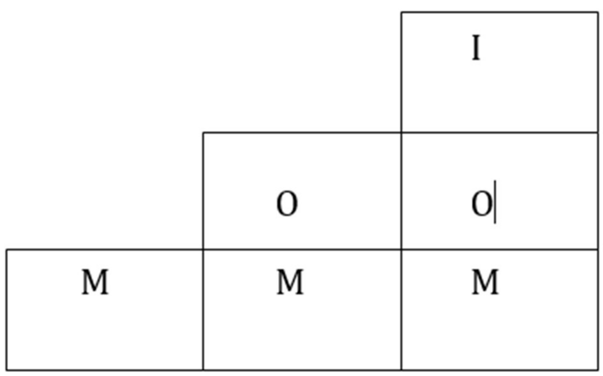
1. In Toth (2011a), der vorläufig letzten Unteresuchung zu intentionalen und nicht-intentionalen Zeichenrelationen, waren wir von Benses (1979, S. 53) kategorialer Zeichendefinition

ZR = (M, ((M→O), (O→I)))

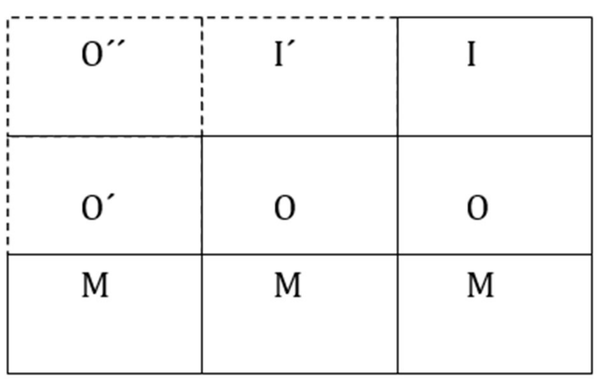
ausgegangen, haben sie wie folgt vervollständigt

ZR = (M, ((M→O), (M→O→I)))

und hernach als unten stehendes „Treppenmodell“ dargestellt:



Dieses setzt jedoch eine komplementäre Menge von drei Teilmengen voraus, und hat somit eine isomorphe Struktur hat wie die Zeichenmenge:



Wenn wir C als Komplementsoperator verwenden, dann gilt

CM = {O´, O´´}

C(M, O) = {I´}

C(M, O, I) = {Ø},

also

C(ZR) = C(M, O, I) = ({O´, O´´}, {I´}, {Ø}).

2. Wir können durch einen weiteren Schritt in Richtung intentionaler und nicht-intentionaler Zeichenrelationen – wir werden sie von nun an „präsuppositive Zeichenrelationen“ nennen aus Gründen, die in Toth (2011b) dargelegt sind – dadurch vornehmen, dass wir aus den gliedweisen (relativen) Entsprechungen komplementärer und nicht-komplementärer Partialrelationen komplementäre Zeichenklassen und komplementäre Realitätsthematiken erzeugen. Dadurch ergibt sich zum Peirceschen Dualsystem (nicht-präsuppositiver) Zkln/Rthn ein komplementäres System präsuppositiver Zkln/Rth. Wir führen sie unerhalb der nachstehenden nicht-präsuppositiven Zkln/Rthn an.

2.1. System non-präsuppositiver Zkln/Rthn

(I.M O.M M.M) × (M.M M.O M.I)

(I.M O.M M.O) × (O.M M.O M.I)

(I.M O.M M.I) × (I.M M.O M.I)

(I.M O.O M.O) × (O.M O.O M.I)

(I.M O.O M.I) × (I.M O.O M.I)

(I.M O.I M.I) × (I.M I.O M.I)

(I.O O.O M.O) × (O.M O.O O.I)

(I.O O.O M.I) × (I.M O.O O.I)

(I.O O.I M.I) × (I.M I.O O.I)

(I.I O.I M.I) × (I.M I.O I.I)

2.2. System präsuppositiver Zkln/Rthn

({Ø}.{O´, O´´} {I´}.{O´, O´´} {O´, O´´}.{O´, O´´}) ×
({O´, O´´}.{O´, O´´} {O´, O´´}.{I´} {O´, O´´}.{Ø})

({Ø}.{O´, O´´} {I´}.{O´, O´´} {O´, O´´}.{I´}) ×
({I´}.{O´, O´´} {O´, O´´}.{I´} {O´, O´´}.{Ø})

({Ø}.{O´, O´´} {I´}.{O´, O´´} {O´, O´´}.{Ø}) ×
({Ø}.{O´, O´´} {O´, O´´}.{I´} {O´, O´´}.{Ø})

({Ø}.{O´, O´´} {I´}.{I´} {O´, O´´}.{I´}) × ({I´}.{O´, O´´} {I´}.{I´} {O´, O´´}.{Ø})

({Ø}.{O´, O´´} {I´}.{I´} {O´, O´´}.{Ø}) × ({Ø}.{O´, O´´} {I´}.{I´} {O´, O´´}.{Ø})

({Ø}.{O´, O´´} {I´}.{Ø} {O´, O´´}.{Ø}) × ({Ø}.{O´, O´´} {Ø}.{I´} {O´, O´´}.{Ø})

({Ø}.{I´} {I´}.{I´} {O´, O´´}.{I´}) × ({I´}.{O´, O´´} {I´}.{I´} {I´}.{Ø})

({Ø}.{I´} {I´}.{I´} {O´, O´´}.{Ø}) × ({Ø}.{O´, O´´} {I´}.{I´} {I´}.{Ø})

({Ø}.{I´} {I´}.{Ø} {O´, O´´}.{Ø}) × ({Ø}.{O´, O´´} {Ø}.{I´} {I´}.{Ø})

({Ø}.{Ø} {I´}.{Ø} {O´, O´´}.{Ø}) × ({Ø}.{O´, O´´} {Ø}.{I´} {Ø}.{Ø})

Bibliographie

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Toth, Alfred, Zur formalen Struktur nicht-intentionaler Zeichen. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2011a

Toth, Alfred, Präsupponierte Geschichten, anlässlich von Kurt Frühs „Im Parterre, links“ (1963). In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2011b

Droste-Effekt bei präsuppositiven Zeichenklassen

1. In Toth (2011) hatten wir das System der präsuppositiven Zeichenrelationen wie folgt dargestellt

$$\left(\begin{array}{l}(\{\emptyset\}.\{2', 2''\}\ \{3'\}.\{2', 2''\}\ \{2', 2''\}.\{2', 2''\}) \times \\ (\{2', 2''\}.\{2', 2''\}\ \{2', 2''\}.\{3'\}\ \{2', 2''\}.\{\emptyset\})\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{l}(\{\emptyset\}.\{2', 2''\}\ \{3'\}.\{2', 2''\}\ \{2', 2''\}.\{3'\}) \times \\ (\{3'\}.\{2', 2''\}\ \{2', 2''\}.\{3'\}\ \{2', 2''\}.\{\emptyset\})\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{l}(\{\emptyset\}.\{2', 2''\}\ \{3'\}.\{2', 2''\}\ \{2', 2''\}.\{\emptyset\}) \times \\ (\{\emptyset\}.\{2', 2''\}\ \{2', 2''\}.\{3'\}\ \{2', 2''\}.\{\emptyset\})\end{array}\right)$$

$$\begin{array}{lcl}
(\{\emptyset\}.\{2', 2''\}\ \{3'\}.\{3'\}\ \{2', 2''\}.\{3'\}) & \times & (\{3'\}.\{2', 2''\}\ \{3'\}.\{3'\}\ \{2', 2''\}.\{\emptyset\}) \\
(\{\emptyset\}.\{2', 2''\}\ \{3'\}.\{3'\}\ \{2', 2''\}.\{\emptyset\}) & \times & (\{\emptyset\}.\{2', 2''\}\ \{3'\}.\{3'\}\ \{2', 2''\}.\{\emptyset\}) \\
(\{\emptyset\}.\{2', 2''\}\ \{3'\}.\{\emptyset\}\ \{2', 2''\}.\{\emptyset\}) & \times & (\{\emptyset\}.\{2', 2''\}\ \{\emptyset\}.\{3'\}\ \{2', 2''\}.\{\emptyset\}) \\
(\{\emptyset\}.\{3'\}\ \{3'\}.\{3'\}\ \{2', 2''\}.\{3'\}) & \times & (\{3'\}.\{2', 2''\}\ \{3'\}.\{3'\}\ \{3'\}.\{\emptyset\}) \\
(\{\emptyset\}.\{3'\}\ \{3'\}.\{3'\}\ \{2', 2''\}.\{\emptyset\}) & \times & (\{\emptyset\}.\{2', 2''\}\ \{3'\}.\{3'\}\ \{3'\}.\{\emptyset\}) \\
(\{\emptyset\}.\{3'\}\ \{3'\}.\{\emptyset\}\ \{2', 2''\}.\{\emptyset\}) & \times & (\{\emptyset\}.\{2', 2''\}\ \{\emptyset\}.\{3'\}\ \{3'\}.\{\emptyset\}) \\
(\{\emptyset\}.\{\emptyset\}\ \{3'\}.\{\emptyset\}\ \{2', 2''\}.\{\emptyset\}) & \times & (\{\emptyset\}.\{2', 2''\}\ \{\emptyset\}.\{3'\}\ \{\emptyset\}.\{\emptyset\})\ .
\end{array}$$

Nun erinnern wir uns, dass gilt

$CM = \{O', O''\}$

$C(M, O) = \{I'\}$

$C(M, O, I) = \{\emptyset\}$,

also

$C(ZR) = C(M, O, I) = (\{O', O''\}, \{I'\}, \{\emptyset\})$.

Somit erhalten wir wegen

{Ø} = ({O´, O´´}, {I´}, {Ø})

in einem 1. Rekursionsschritt

((({O´, O´´}, {I´}, {Ø}).{2´, 2´´} {3´}.{2´, 2´´} {2´, 2´´}.{2´, 2´´}) ×
({2´, 2´´}.{2´, 2´´} {2´, 2´´}.{3´} {2´, 2´´}.({O´, O´´}, {I´}, {Ø})))

((({O´, O´´}, {I´}, {Ø}).{2´, 2´´} {3´}.{2´, 2´´} {2´, 2´´}.{3´}) ×
({3´}.{2´, 2´´} {2´, 2´´}.{3´} {2´, 2´´}.({O´, O´´}, {I´}, {Ø})))

((({O´, O´´}, {I´}, {Ø}).{2´, 2´´} {3´}.{2´, 2´´} {2´, 2´´}.({O´, O´´}, {I´}, {Ø})) ×
(({O´, O´´}, {I´}, {Ø}).{2´, 2´´} {2´, 2´´}.{3´} {2´, 2´´}.({O´, O´´}, {I´}, {Ø})))

((({O´, O´´}, {I´}, {Ø}).{2´, 2´´} {3´}.{3´} {2´, 2´´}.{3´})
× ({3´}.{2´, 2´´} {3´}.{3´} {2´, 2´´}.({O´, O´´}, {I´}, {Ø})))

((({O´, O´´}, {I´}, {Ø}).{2´, 2´´} {3´}.{3´} {2´, 2´´}.({O´, O´´}, {I´}, {Ø})) ×
(({O´, O´´}, {I´}, {Ø}).{2´, 2´´} {3´}.{3´} {2´, 2´´}.({O´, O´´}, {I´}, {Ø})))

((({O´, O´´}, {I´}, {Ø}).{2´, 2´´} {3´}.({O´, O´´}, {I´}, {Ø}) {2´, 2´´}.({O´, O´´}, {I´}, {Ø}))
×
(({O´, O´´}, {I´}, {Ø}).{2´, 2´´} ({O´, O´´}, {I´}, {Ø}).{3´} {2´, 2´´}.({O´, O´´}, {I´}, {Ø})))

((({O´, O´´}, {I´}, {Ø}).{3´} {3´}.{3´} {2´, 2´´}.{3´}) ×
({3´}.{2´, 2´´} {3´}.{3´} {3´}.({O´, O´´}, {I´}, {Ø})))

((({O´, O´´}, {I´}, {Ø}).{3´} {3´}.{3´} {2´, 2´´}.({O´, O´´}, {I´}, {Ø})) ×
(({O´, O´´}, {I´}, {Ø}).{2´, 2´´} {3´}.{3´} {3´}.({O´, O´´}, {I´}, {Ø})))

((({O´, O´´}, {I´}, {Ø}).{3´} {3´}.({O´, O´´}, {I´}, {Ø}) {2´, 2´´}.({O´, O´´}, {I´}, {Ø}))
×
(({O´, O´´}, {I´}, {Ø}).{2´, 2´´} ({O´, O´´}, {I´}, {Ø}).{3´} {3´}.({O´, O´´}, {I´}, {Ø})))

(({O´, O´´}, {I´}, {Ø}).({O´, O´´}, {I´}, {Ø}) {3´}.({O´, O´´}, {I´}, {Ø}) {2´, 2´´}.({O´, O´´}, {I´}, {Ø})) ×

(({O´, O´´}, {I´}, {Ø}).{2´, 2´´} ({O´, O´´}, {I´}, {Ø}).{3´} ({O´, O´´}, {I´}, {Ø}).({O´, O´´}, {I´}, {Ø})),

in einem 2. Rekursionsschritt

(({O´, O´´}, {I´}, ({O´, O´´}, {I´}, {Ø})).{2´, 2´´} {3´}.{2´, 2´´} {2´, 2´´}.{2´, 2´´}) ×

({2´, 2´´}.{2´, 2´´} {2´, 2´´}.{3´} {2´, 2´´}.({O´, O´´}, {I´}, ({O´, O´´}, {I´}, {Ø})))

(({O´, O´´}, {I´}, ({O´, O´´}, {I´}, {Ø})).{2´, 2´´} {3´}.{2´, 2´´} {2´, 2´´}.{3´}) ×

({3´}.{2´, 2´´} {2´, 2´´}.{3´} {2´, 2´´}.({O´, O´´}, {I´}, ({O´, O´´}, {I´}, {Ø})))

(({O´, O´´}, {I´}, ({O´, O´´}, {I´}, {Ø})).{2´, 2´´} {3´}.{2´, 2´´} {2´, 2´´}.({O´, O´´}, {I´}, ({O´, O´´}, {I´}, {Ø}))) ×

(({O´, O´´}, {I´}, ({O´, O´´}, {I´}, {Ø})).{2´, 2´´} {2´, 2´´}.{3´} {2´, 2´´}.({O´, O´´}, {I´}, ({O´, O´´}, {I´}, {Ø})))

(({O´, O´´}, {I´}, ({O´, O´´}, {I´}, {Ø})).{2´, 2´´} {3´}.{3´} {2´, 2´´}.{3´})

× ({3´}.{2´, 2´´} {3´}.{3´} {2´, 2´´}.({O´, O´´}, {I´}, ({O´, O´´}, {I´}, {Ø})))

(({O´, O´´}, {I´}, ({O´, O´´}, {I´}, {Ø})).{2´, 2´´} {3´}.{3´} {2´, 2´´}.({O´, O´´}, {I´}, ({O´, O´´}, {I´}, {Ø}))) ×

(({O´, O´´}, {I´}, ({O´, O´´}, {I´}, {Ø})).{2´, 2´´} {3´}.{3´} {2´, 2´´}.({O´, O´´}, {I´}, ({O´, O´´}, {I´}, {Ø})))

(({O´, O´´}, {I´}, ({O´, O´´}, {I´}, {Ø})).{2´, 2´´} {3´}.({O´, O´´}, {I´}, ({O´, O´´}, {I´}, {Ø})) {2´, 2´´}.({O´, O´´}, {I´}, ({O´, O´´}, {I´}, {Ø}))) ×

(({O´, O´´}, {I´}, ({O´, O´´}, {I´}, {Ø})).{2´, 2´´} ({O´, O´´}, {I´}, ({O´, O´´}, {I´}, {Ø})).{3´} {2´, 2´´}.({O´, O´´}, {I´}, ({O´, O´´}, {I´}, {Ø})))

(({O´, O´´}, {I´}, ({O´, O´´}, {I´}, {Ø})).{3´} {3´}.{3´} {2´, 2´´}.{3´}) ×

({3´}.{2´, 2´´} {3´}.{3´} {3´}.({O´, O´´}, {I´}, ({O´, O´´}, {I´}, {Ø})))

(({O´, O´´}, {I´}, ({O´, O´´}, {I´}, {Ø})).{3´} {3´}.{3´} {2´, 2´´}.({O´, O´´}, {I´}, ({O´, O´´}, {I´}, {Ø}))) ×

(({O´, O´´}, {I´}, ({O´, O´´}, {I´}, {Ø})).{2´, 2´´} {3´}.{3´} {3´}.({O´, O´´}, {I´}, ({O´, O´´}, {I´}, {Ø})))

(({O´, O´´}, {I´}, ({O´, O´´}, {I´}, {Ø})).{3´} {3´}.({O´, O´´}, {I´}, ({O´, O´´}, {I´}, {Ø})) {2´, 2´´}.({O´, O´´}, {I´}, ({O´, O´´}, {I´}, {Ø}))) ×

(({O´, O´´}, {I´}, ({O´, O´´}, {I´}, {Ø})).{2´, 2´´} ({O´, O´´}, {I´}, ({O´, O´´}, {I´}, {Ø})).{3´} {3´}.({O´, O´´}, {I´}, ({O´, O´´}, {I´}, {Ø})))

(({O´, O´´}, {I´}, ({O´, O´´}, {I´}, {Ø})).({O´, O´´}, {I´}, ({O´, O´´}, {I´}, {Ø})) {3´}.({O´, O´´}, {I´}, ({O´, O´´}, {I´}, {Ø})) {2´, 2´´}.({O´, O´´}, {I´}, ({O´, O´´}, {I´}, {Ø}))) ×

(({O´, O´´}, {I´}, ({O´, O´´}, {I´}, {Ø})).{2´, 2´´} ({O´, O´´}, {I´}, ({O´, O´´}, {I´}, {Ø})).{3´} ({O´, O´´}, {I´}, ({O´, O´´}, {I´}, {Ø})).({O´, O´´}, {I´}, ({O´, O´´}, {I´}, {Ø})))

usw.

Man erinnert sich also an ähnliche, durch Zirkularität angelegte und durch Einsetzung systematisch erzeugbare Mirimanoff-Serien beim sog. Droste- oder „La vache qui rit“-Effekt in der Semiotik (Toth 2008). In Übereinstimmung mit den seinerzeit erzielten Ergebnissen halten wir fest: Ganz egal, ob man von einer Zeichendefinition mit Fundierungs- oder Antifundierungs-Axiom ausgeht, das komplementäre System der präsupponierten Zeichenrelationen ist prinzipiell antifundiert.

Bibliographie

Toth, Alfred, The Droste effect in semiotics. In: Grundlagenstudien aus Kybernetik und Geisteswissenschaft 50/3, 2009, S. 139-145

Toth, Alfred, Präsuppositive Zeichenrelationen. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2011

Nochmals zur “surrealen” Begründung der triadischen Zeichenrelation

1. Wie ich zuletzt bereits in Toth (2011) ausgeführt hatte, kann man mittels den Conway-Zahlen, auch „surreale“ Zahlen genannt, die Peano-Zahlen begründen. Da Bense die letzteren ausdrücklich als Basis zur Einführung seiner „Primzeichen“ herangezogen hatte (Bense 1981, S. 17 ff.), kann man also auch die triadische Zeichenrelation mit Hilfe der surrealen Zahlen einführen.

2. Es ist bekannt, dass es unendlich viele komplexe Zahlen gibt, aber es ist weniger bekannt, dass es noch viel mehr surreale Zahlen gibt. So kann man z.B. die natürliche Zahl 1 wie folgt surreal definieren:

$1 := (0 \mid 2)$

$1 := (0 \mid 3)$

$1 := (0 \mid 4)$

...

$1 := (0 \mid \omega)$

3. Wenn wir nun die drei Primzeichen 1, 2, 3 definieren, so begegnen wir das interessante Faktum, dass wir nicht darum herum kommen, entweder die 0 oder die 4 oder höhere Zahlen vorauszusetzen, vgl.

$1 := (0 \mid 2) = (0 \mid 3) = (0 \mid 4) \ldots$

$2 := (1 \mid 3) = (1 \mid 4) = (1 \mid 5) \ldots$

$3 := (2 \mid 4) = (2 \mid 5) = (2 \mid 6) \ldots$

Selbst, wenn wir die untere oder obere Grenze mit Paaren besetzen

$1 := (-1, 0 \mid \ ) = (0 \mid 2, 3)$

$2 := (0, 1 \mid \ ) = (0 \mid 3, 4)$

$3 := (1, 2 \mid \ ) = (0 \mid 4, 5)$,

müssen wir entweder die 0 oder die 4 voraussetzen. Ihre eigene Voraussetzung würde das Problem natürlich nicht beseitigen, sondern nur den jeweiligen

Ausschnitt aus der Zahlenfolge immer mehr vergrössern. Im minimalen Fall benötigen wir also zur Einführung von Primzeichen mit Hilfe der surrealen Conway-Zahlen zusätzlich entweder die 0 die 4; wenn wir alle drei Primzeichen einführen wollen, aber in jedem Fall sowohl die 0 als auch die 4. Vom Standpunkt der surrealen Arithmetik aus ist also die triadische Zeichenrelation kein Fragment einer 4-wertigen, sondern einer 5-wertigen Zahlenfolge.

Bibliographie

Bense, Max, Axiomatik und Semiotik. Baden-Baden 1981

Toth, Alfred, Peircesche AFA-Semiotik auf der Basis surrealer Zahlen. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2011

Zeichen und Ströme

1. Bekanntlich lautet eines der Theoreme der sog. AFA-Mengenlehre, in der das üblicherweise gültige Fundierungsaxiom durch ein "Anti-Fundierungsaxiom" (AFA) ersetzt ist (vgl. Aczél 1988, dem auch einige der folgenden Definitionen entnommen sind)

$x = \{x\}$.

Diese Form der Zirkularität, die somit durch AFA in die Mengentheorie gebracht wird, ist in der Semiotik deswegen von eminenter Bedeutung, weil nach Benses Definition (1979, S. 53) das Zeichen sich selbst in seiner drittheitlichen Partialrelation enthält und dadurch seine Autoreproduktivität garantiert

$PZR = (1 \rightarrow ((1 \rightarrow 2) \rightarrow (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3)))$.

2. Problematischer ist es bei dem in Toth (2012a) eingeführten dyadischen Zeichenmodell

$BZR = \langle x, y \rangle$,

auch wenn man hier Typen-Stufen-Hierarchien z.B. der folgenden Formen konstruieren kann (vgl. Toth 2012b)

$BZR' = \langle x, \langle x, y \rangle\rangle$ / $BZR' = \langle\langle x, y \rangle, y \rangle\rangle$

$BZR'' = \langle x, \langle\langle x, y \rangle, \langle y, z \rangle\rangle\rangle$ / $BZR'' = \langle\langle\langle x, y \rangle, \langle y, z \rangle\rangle, z \rangle\rangle$,

da man jedes n-tupel als geordnetes Paar darstellen kann (Schwabhäuser 1954). Allerdings ist es in der AFA-Mengentheorie möglich, x, y und z wie folgt zu definieren

$x^\dagger = \langle 0, y^\dagger \rangle$

$y^\dagger = \langle 1, z^\dagger \rangle$

$z^\dagger = \langle 2, x^\dagger \rangle$,

so ist also z.B.

$y^\dagger = (1, 2, 0, 1, 2, 0, ...)$.

Ferner kann man eine "Zip"- oder "Merging"-Folge definieren

$\mathrm{zip}(a, b) = <\mathrm{head}(a), \mathrm{zip}(b, \mathrm{tail}(a)>$,

z.B. ist

$\mathrm{zip}(x^\dagger, y^\dagger) = (0, 1, 1, 2, 2, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 0, ...)$,

d.h. wir haben

$x = <1, \mathrm{zip}(x, y)>$

$y = <0, \mathrm{zip}(y, x)>$,

die wir nun für die dyadische Zeichenrelation BZR verwenden können, in dessen Grundstufe ja nur zwei Variablen vorkommen. Nun war bereits in Toth (2012b) daraufhingewiesen worden, dass BZR nur ein Spezialfall der allgemeinen Zeichenrelation $ZR^{2,n}$ ist, d.h. das Zeichen kann trotz seiner Binarität n-adisch sein. Wir führen deshalb folgende (bereits von Aczél vorgeschlagene) funktionale Definition von Zeichenströmen mit semiotisch n-adische Relationen ein

$f_a(0) = a$

$f_a(n+1) = \mathrm{tail}(f_a(n))$.

Wir haben dann also

$x_0 = <f(0), x_1>$

$x_1 = <f(1), x_2>$

...

$x_n = <f(n), x_{n+1}>$.

Bibliographie

Aczél, Peter, Non-well-founded sets. Stanford 1988

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Schwabhäuser, Wolfram, Zur Definition des geordneten Paares von Mengen beliebiger Stufe. In: Mathematische Nachrichten 11/1-2, 1954, S. 81-84

Toth, Alfred, Grundlegung einer logischen Semiotik. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2012a

Toth, Alfred, Dyadisch-semiotische Typen und Stufen. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2012b

Conway-Semiotik mit Droste-Effekt

1. Unter Benutzung der mengentheoretischen Einführung von Conway-Zahlen (auch Conway-Spielen) genannt (vgl. Hermes 1992, S. 291 ff.) definieren wir:

1 ≡ ({0}, Ø}

2 ≡ ({0, 1}, Ø}

3 ≡ ({0, 1, 2}, Ø}

n+1 ≡ ({0, ..., n}, Ø}

ω ≡ ({0, 1, 3, ...}, Ø}

Für zwei zwischen zwei natürlichen Zahlen liegende Zahlen gilt z.B.

½ ≡ ({0}, {1}}.

2. Wie man sieht, korrespondiert diese neue Einführung der Conway-Zahlen mit der fundamentalen Eigenschaft der Selbstenthaltung des Zeichens bzw. seiner Relata, vgl. die Zeichendefinition von Bense (1979, S. 53):

ZR = (1 → ((1 → 2) → (1 → 2 → 3)))

Damit ist es möglich, analog zum in Toth (2009) gegebenen Verfahren, eine Conway-Semiotik mit Droste- oder La vache qui rit-Effekt, d.h. Mirimanoff-Serien einer Mengentheorie mit Antifundierungsaxion zu konstruieren:

1 ≡ ({0}, Ø)

2 ≡ ({0, ({0}, Ø}), Ø)

3 ≡ ({0, ({0}, Ø), ({0, ({0}, Ø}), Ø)}, Ø)

Wenn man will, kann man zu höheren als triadischen Relationen fortschreiten:

4 ≡ ({0, ({0}, Ø), ({0, ({0}, Ø}), Ø), ({0, ({0}, Ø), ({0, ({0}, Ø}), Ø)}, Ø)}, Ø)

5 ≡ ({0, ({0}, Ø), ({0, ({0}, Ø}), Ø), ({0, ({0}, Ø), ({0, ({0}, Ø}), Ø)}, Ø),
({0, ({0}, Ø), ({0, ({0}, Ø}), Ø), ({0, ({0}, Ø), ({0, ({0}, Ø}), Ø)}, Ø)}, Ø)}, Ø)

Mit Hilfe von Conway-Zahlen bzw. -Mengen benötigt man also zur Definition einer n-adischen Relation die erstes (n-1) Peano-Zahlen sowie die leere Menge.

3. Wie man sogleich erkennt, sind Conway-Zahlen eng den Dedekindschen Schnitten verwandt, nur dass dort die kein Element des Zahlenpaares, das eine Zahl definiert, leer sein darf (2. Forderung von Dedekind, vgl. z.B. Hermes 1992, S. 276). Man kann somit das obige semiotische Conway-System nicht tel-quel in ein entsprechendes Dedekind-System transformieren. Es gibt jedoch einen harmlosen kleinen Trick: Denn nichts hindert uns daran

$1 \equiv (\{0\}, \emptyset) = (\{-1, 0\} \mid)$

$2 \equiv (\{0, (\{0\}, \emptyset\}), \emptyset) = \{-1, 0, 1 \mid \}$

$3 \equiv (\{0, (\{0\}, \emptyset), (\{0, (\{0\}, \emptyset\}), \emptyset)\}, \emptyset) = \{-1, 0, 1, 2 \mid \}$

Damit ergibt sich also

$1 = \{x \mid x > 0\}$

$2 = \{x \mid x > 1\}$

$3 = \{x \mid x > 2\}$,

d.h wir haben nun die leere Menge ersetzt, wobei sich die Existenz einer „Nullheit“ (vgl. Bense 1975, S. 65 f.) wie schon oben zwangsweise ergibt.

Bibliographie

Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1975

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Hermes, Hans, Zahlen und Spiele. In: Ebbinghaus, Heinz-Dieter et al., Zahlen. Berlin 1992, S. 276-297

Toth, Alfred, The Droste effect in semiotics. In: Grundlagenstudien aus Kybernetik und Geisteswissenschaft 50/3, 2009, S. 139-145.

Surreale semiotische Morphismen

1. Mit Hilfe von surrealen Zahlen, auch Conway-Zahlen oder Conway-Spiele genannt (vgl. Conway/Guy 1996, S. 283 ff.; Hermes 1992, S. 276 ff.), kann man die Primzeichen (Bense 1981, S. 17 ff.) wie folgt definieren:

$1 \equiv (\{0\}, \emptyset)$

$2 \equiv (\{0, 1\}, \emptyset)$

$3 \equiv (\{0, 1, 2\}, \emptyset)$

...

$n+1 \equiv (\{0, ..., n\}, \emptyset\}$

$\omega \equiv (\{0, 1, 3, ...\}, \emptyset\}$

Für zwei zwischen zwei natürlichen Zahlen liegende Zahlen gilt z.B.

$½ \equiv (\{0\}, \{1\})$.

2. Wie man sieht, korrespondiert diese neue Einführung der Conway-Zahlen mit der fundamentalen Eigenschaft der Selbstenthaltung des Zeichens bzw. seiner Relata, vgl. die Zeichendefinition von Bense (1979, S. 53):

$ZR = (1 \rightarrow ((1 \rightarrow 2) \rightarrow (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3)))$

Wir erhalten daher sofort

$ZR = ((\{0\}, \emptyset) \rightarrow (((\{0\}, \emptyset) \rightarrow (\{0, 1\}, \emptyset)) \rightarrow ((\{0\}, \emptyset) \rightarrow (\{0, 1\}, \emptyset) \rightarrow (\{0, 1, 2\}, \emptyset))))$.

Vom kategorietheoretischen Standpunkt aus verändern sich beim Wechsel von natürlichen zu surrealen Zahlen also die Objekte, genauer: die Domänen und Codomänen der semiotischen Abbildungen, nicht aber die Morphismen. Dies erlaubt es uns, auf bequeme Weise die in der klassischen, auf natürlichen Zahlen basierten semiotischen Kategorietheorie (vgl. Bense 1981, S. 124 ff., Toth 1993, S. 21 ff.) definierten semiotischen Morphismen wie folgt „surreal" zu redefinieren:

$\alpha := 1 \rightarrow 2 \equiv (\{0\}, \emptyset) \rightarrow (\{0, 1\}, \emptyset)$

$\beta := 2 \rightarrow 3 \equiv (\{0, 1\}, \emptyset) \rightarrow (\{0, 1, 2\}, \emptyset)$

Inverse:

$\alpha° := 1 \leftarrow 2 \equiv (\{0, 1\}, \emptyset) \rightarrow (\{0\}, \emptyset)$

$\beta° := 2 \leftarrow 3 \equiv (\{0, 1, 2\}, \emptyset) \rightarrow (\{0, 1\}, \emptyset)$

Komponierte:

$\beta\alpha := 1 \rightarrow 3 \equiv (\{0\}, \emptyset) \rightarrow (\{0, 1, 2\}, \emptyset)$

$\alpha°\beta° := 3 \rightarrow 1 \equiv (\{0, 1, 2\}, \emptyset) \rightarrow (\{0\}, \emptyset)$

3. Falls man das semiotische Leerzeichen nicht akzeptiert (wie dies in der gesamten Stuttgarter Schulem ausserhalb meiner Arbeiten der Fall ist, obvwohl es sich in natürlicher Weise aus der Potenzmenge der Menge der Primzeichen ergibt), kann man surreale Zahlen in einer Art von Dedekindschen Schnitten definieren (vgl. Toth 2011). Man erhält dann

$\alpha := 1 \rightarrow 2 \equiv (\{-1, 0\} \mid) \rightarrow \{-1, 0, 1 \mid \}$

$\beta := 2 \rightarrow 3 \equiv \{-1, 0, 1 \mid \} \rightarrow \{-1, 0, 1, 2 \mid \}$

Inverse:

$\alpha° := 1 \leftarrow 2 \equiv \{-1, 0, 1 \mid \} \rightarrow (\{-1, 0\} \mid)$

$\beta° := 2 \leftarrow 3 \equiv \{-1, 0, 1, 2 \mid \} \rightarrow \{-1, 0, 1 \mid \}$

Komponierte:

$\beta\alpha := 1 \rightarrow 3 \equiv (\{-1, 0\} \mid) \rightarrow \{-1, 0, 1, 2 \mid \}$

$\alpha°\beta° := 3 \rightarrow 1 \equiv \{-1, 0, 1, 2 \mid \} \rightarrow (\{-1, 0\} \mid)$.

Bibliographie

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Bense, Max, Axiomatik und Semiotik. Baden-Baden 1981

Conway, John H./Guy, Richard, K., The Book of Numbers. New York 1998

Hermes, Hans, Zahlen und Spiele. In: Ebbinghaus, Heinz-Dieter et al., Zahlen. Berlin 1992, S. 276-297

Toth, Alfred, Entwurf einer Semiotisch-Relationalen Grammatik. Tübingen 1993

Toth, Alfred, Conway-Semiotik mit Droste-Effekt. In: Eletronic Journal for Mathematical Semiotoics, 2011

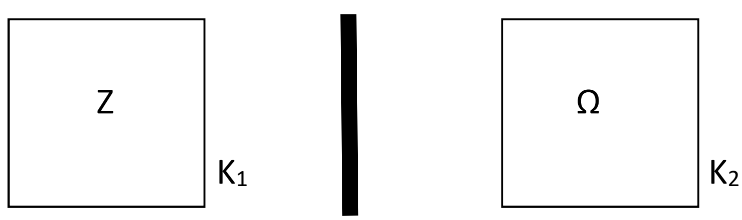
Informationsverlust durch Metaobjektivation

1. Das Zeichen ist „ein realitätsthematisierendes Instrument, weil Zeichenmittel, Objekt und Interpretant in ein und derselben Welt sind” (Gfesser 1990, S. 139). Nun machen das Mittel (M), das Objekt (O) und der Interpretant (I) das Zeichen im Peirceschen Sinne als triadische Relation aus; von der Wissenschaft der Zeichen, der Semiotik aber gilt: Sie ist „ein nicht-transzendentales, ein nicht-apriorisches und nicht-platonisches Organon” (Gfesser 1990, S. 133). Offenbar ist die Bedingung, dass alle drei Bestimmungsstücke (bzw. Partialrelationen) des Zeichens sich in derselben Welt befinden, die Voraussetzung dafür, daß die Wissenschaft von den Zeichen die Ontologie im Sinne der Welt der Objekte weder berührt noch in ihr fundiert ist: „Gegeben ist, was repräsentierbar ist” (Bense 1981, S. 11). Das bedeutet aber zweierlei: 1. kann man die Objekte dieser Welt nur als durch Zeichen repräsentierte – d.h. eben als Zeichen – erkennen, und 2. die Antwort auf die Frage, ob es Objekte gibt, die außerhalb ihrer zeichenhaften Repräsention existieren, bleibt für uns im Dunkeln – und muß vom Standpunkt der „antimetaphysischen” Einstellung der Semiotik sogar als sinnlos bezeichnet werden. Das Beste, was wir sagen können, ist: „Das Seiende tritt als Zeichen auf, und Zeichen überleben in der rein semiotischen Dimension ihrer Bedeutungen den Verlust der Realität” (Bense 1952, S. 80). Es handelt sich mit anderen Worten bei der Semiotik um eine „Eschatologie der Hoffnungslosigkeit” (Bense 1952, S. 100), denn wir sind in diesem „semiotischen Universum” (Bense) gefangen, und sogar die alte Frage, ob die Objekte der äußeren Welt bei ihrer Wahrnehmung von außen in unseren Kopf kommen oder ob sie Phantasmagorien, Projektionen unseres Gehirns nach außen seien, ist sinnlos, da es ja nur eine Welt, eben die semiotische, gibt.

2. Dennoch beginnt die Semiotik mit dem Prozeß der Zeichensetzung, der sog. thetischen Einführung eines Objektes als Zeichen: „Zeichen ist alles, was zum Zeichen erklärt wird und nur, was zum Zeichen erklärt wird. Jedes beliebige Etwas kann (im Prinzip) zum Zeichen erklärt werden (Bense 1967, S. 9). Dieser Prozeß wird von Bense als Transformation bestimmt: „Was zum Zeichen erklärt wird, ist selbst kein Objekt mehr, sondern Zuordnung (zu etwas, was Objekt sein kann); gewissermaßen Metaobjekt” (Bense 1967, S. 9). Aus dieser Definition folgt aber vor allem: Es gibt es doch Objekte – denn Zeichen schneien nicht vom Himmel

herunter, sondern sie werden durch ein Bewußtsein in einem intentionalen Akt zu Zeichen erklärt. Daraus wiederum folgt aber: Die angeblich einzige semiotische Welt steht in Wahrheit der Ontologie gegenüber – selbst wenn darunter bloß ein Reservoir von Objekten als Zeichen-Anwärtern verstanden wird. Damit ist es aber noch nicht getan, denn die thetische Setzung von Zeichen setzt ferner ein Bewußtsein voraus – und damit ein Subjekt, denn Zeichen können sich wohl wegen ihres Interpretantenbezugs selbst reproduzieren, aber sie benötigen ein Subjekt als Handlungsträger zu ihrer Einführung. Damit steht also der Semiotik nicht nur eine Ontologie, sondern eine vollständige Metaphysik gegenüber. Somit kommt man nicht umhin, sich um die Zusammenhänge zwischen Zeichen und Objekten zu bemühen und nicht nur im Sinne der semiotischen Realitätentheorie die Differenz zwischen Zeichen und Objekt durch einen ebenfalls zeichenvermittelten semiotischen Objektbegriff zu konstatieren.

3. Die Semiotik setzt also voraus, daß Zeichen (Z) und Objekt (Ω) diskontextural geschieden sind, da ja ein metaobjektiviertes Objekt eben kein Objekt mehr ist, sondern ein Zeichen:

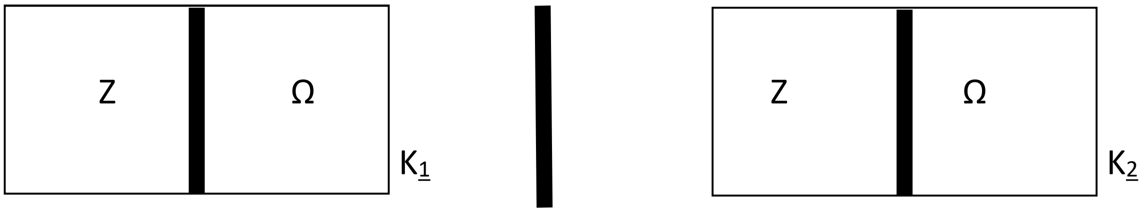


Das Zeichen gehört somit der Kontextur K_1 an, während das Objekt der Kontextur K_2 angehört. Diese erste Form der Transzendenz betrifft also folgende beiden Prozesse:

$K_1 \rightarrow K_2$

$K_1 \leftarrow K_2$

Die Günthersche Logik wird ferner als „disseminiertes Verbundsystem zweiwertiger Logiken" angesehen. Da eine zweiwertige Logik aus Subjekt und Objekt besteht, bilden diese also zusammen eine einzige Kontextur, die somit von anderen Kontexturen diskontextural geschieden ist:



Damit ergibt sich aber eine zweite Form von Transzendenz:

$K_{\underline{1}} \rightarrow K_{\underline{2}}$

$K_{\underline{1}} \leftarrow K_{\underline{2}}$

Das bedeutet folgendes: Der primäre kontexturale Abbruch zwischen Subjekt und Objekt, der auf semiotischer Ebene in der Dichotomie von Zeichen und Objekt erscheint, wird auf logischer Ebene durch den sekundären Abbruch zwischen Kontexturen quasi auf höherer Ebene repetiert. Kronthaler (1986) spricht von polykontexturalen Intra- und Transoperatoren.

4. Da

Z = (M, O, I)

ist, ergeben sich für das Zeichen drei Kontexturübergänge oder Transzendenzen:

1. M → O / M ← O

2. O → I / O ← I

3. M → I / M ← I

Da es nichts gibt, das zu sich selbst transzendent ist, ergeben sich für n Zeichen

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (\mathrm{n} - (\mathrm{k} - 1))}{k!}$$

Transzendenzen, und zwar natürlich wiederum in je zwei Richtungen. Es sei nun

1. $\alpha := Z_1 \rightarrow \Omega_2$

2. $\alpha° = Z_1 \leftarrow \Omega_2$

Dann können wir festsetzen

3. $\beta := [Z_1, \Omega_2]_{\underline{1}} \rightarrow [Z_1, \Omega_2]_{\underline{2}} = \alpha_{\underline{1}} \rightarrow \alpha_{\underline{2}}$

4. $\beta° := [Z_1, \Omega_2]_{\underline{1}} \leftarrow [Z_1, \Omega_2]_{\underline{2}} = \alpha_{\underline{1}} \leftarrow \alpha_{\underline{2}}$

Somit ist

5. $[Z_1, \Omega_2]_{\underline{1}} \rightarrow [\Omega_2, Z_1]_{\underline{2}} = \alpha_{\underline{1}} \rightarrow \alpha°_{\underline{2}}$

6. $[\Omega_2, Z_1]_{\underline{1}} \rightarrow [Z_1, \Omega_2]_{\underline{2}} = \alpha°_{\underline{1}} \rightarrow \alpha_{\underline{2}}$

7. $[\Omega_2, Z_1]_{\underline{1}} \rightarrow [\Omega_2, Z_1]_{\underline{1}} = \alpha°_{\underline{1}} \rightarrow \alpha°_{\underline{2}}$

5. Falls es uns also gelingt, die primäre Transzendenz α zu messen, können wir damit auch alle Typen von sekundärer Transzendenz messen. Nun läßt sich die Information eines Zeichens nach einem Vorschlag Benses durch sog. Repräsentationswerte messen, woraus einfach die direkte Quersumme der Zahlenwerte der das Zeichen konstituierenden Universalkategorien verstanden wird, z.B. Rpw(3.1 2.1 1.3) = (3 + 1 + 2 + 1 + 1 + 3) = 11. Da die Zeichenklasse mit der geringsten Semiotizität und daher mit der höchsten Ontizität (3.1 2.1 1.1) mit Rpw(3.1 2.1 1.1) = 9 und diejenige mit der höchsten Semiotizität und daher mit der geringsten Ontizität (3.3 2.3 1.3) mit Rpw(3.3 2.3 1.3) = 15 ist, ergibt sich als informationstheoretisches Intervall von Zeichen

Int(Z) = [9, 15].

Wie aber sollen neben den Zeichen Z_i die Objekte Ω_j gemessen werden? Traditionell besteht jedes Objekt aus Form und Substanz

$\Omega_j = f(F_j, S_j)$,

diese korrespondieren nun aber mit den Bestimmungsgrößen ästhetischer Zustände:

$F_j \sim O$

$S_j \sim C$,

d.h. die Form eines Objektes läßt sich durch seine Ordnung, die Substanz eines Objektes durch seine Komplexität messen, denn es ist (vgl. z.B. Bense 1969, S. 43 ff.)

ÄZ = O/C,

d.h. der ästhetische Zustand eines Objektes läßt sich durch den Quotienten aus Ordnung und Komplexität dieses Objektes messen. Das bedeutet: Je höher die

Ordnung und je geringer die Komplexität eines Objektes sind, desto höher ist sein ästhetischer Zustand. Dies bedeutet aber auch: In der Natur vorgegebene Objekte, die weder determiniert noch antizipierbar sind (in anderen Worten: das, was die klassische Ontologie unter Objekten versteht), müssen einen sehr geringen ästhetischen Zustand haben, denn dieser wächst ja offenbar umgekehrt proportional zur Entropie von Objekten (Bense verwendete deshalb für die ästhetischen Zustände im Gegensatz zu den Verteilungen von z.B. Gasmolekülen in einem Vacuum den Begriff „negentropisch" im Sinne von „negativ entropisch"). Man kann dies aber noch auf andere Weise formal ausdrücken: Bense (1981) hatte nämlich die Äquivalenz zwischen ästhetischen Objekten und Zeichen durch

ÄZ $\leftrightarrow$ Z = (O/C) $\leftrightarrow$ (3.1 2.2 1.3)

festgestellt, wobei (3.1 2.2 1.3) der Peircesche Ausdruck für die Zeichenklasse des Zeichens selbst, in anderen Worten für die eigenreale Selbstenthaltung JEDES Zeichens ist. (Anders gesagt: Man kann die höhere oder geringere Semiotizität jedes Zeichens auch dadurch bestimmen, daß man die Differenz eines beliebigen Zeichens zum Zeichen an sich bestimmt.) Da Rpw(3.1 2.2 1.3) = 12 und Int(Z) = [9, 15] ist, kann man die Zeichen vom Standpunkt der semiotischen Informationstheorie in zwei diskrete Klassen einteilen:

1. In Zeichen, für die Δ(Rpw(Z, 12) positiv ist.

2. In Zeichen, für die Δ(Rpw(Z, 12) negativ ist.

Damit sind die Zeichen, deren repräsentationswertiges Intervall Int = [1, 3] ist, diejenigen Zeichen, die ästhetische Objekte bezeichnen, während diejenigen Zeichen, deren repräsentationswertiges Intervall Int = [-1, -3] ist, nicht-ästhetische Objekte bezeichnen. Z.B. ist

Δ(Rpw((3.2 2.3 1.3), 12) = Δ(14, 12) = +2,

aber

Δ(Rpw((3.1 2.1 1.2), 12) = Δ(10, 12) = -2,

Erwartungsgemäß bezeichnet also (3.1 2.1 1.2) ein „hypoästhetisches Objekt", da der Repräsentationswert seines Zeichens ja um den Betrag |2| unterhalb des Repräsentationswertes des Zeichens an sich liegt, das nach dem Benseschen ästhetisch-semiotischen Äquivalenzprinzip ja dem ästhetischen Zustand von

Objektes korrespondiert. Das durch (3.2 2.3 1.3) bezeichnete Objekt ist demzufolge ein „hyperästhetisches Objekt".

In anderen Worten: Bei der Messung von Objekten durch Form und Substanz bzw. Ordnungen und Komplexität haben wir es mit einem stark wertereduzierten Intervall

$Int_\Omega = [-1, -3]$ zu tun.

Aus ÄZ $\leftrightarrow$ Z = (O/C) $\leftrightarrow$ (3.1 2.2 1.3) folgt nun aber

$Z = \Omega^{-1} = (C/O)$,

denn Zeichen und Objekt sind da dichotomisch und damit unter Ausschluß eines Dritten definiert: Nach Bense (1967, S. 9) ist ein Etwas entweder ein Zeichen oder ein Objekt, aber weder kann es beides noch nichts noch ein Drittes sein. Somit ist der Repräsentationswert eines Objektes invers zu demjenigen eines Zeichens, d.h. je höher die Komplexität und je geringer die Ordnung ist, desto höher ist der Wert seines „objektalen Zustandes (oZ).

Damit bestimmt sich nun die Differenz zwischen Zeichen und Objekt einfach durch

$\alpha = \Delta(Z_1, \Omega_2) = \Delta(Rpw(Z_1), Rpw(\Omega_2))$.

Wegen $Z = \Omega^{-1} = (C/O)$ ist also

$\alpha = \Delta(Rpw(Z_1), Rpw(Z_1^{-1})) = \Delta([9, 15], [-1, -3]])$.

Z.B. ist also für die Zeichenklasse (3.1 2.1 1.3) und das durch sie bezeichnete Objekt:

$\alpha = \Delta(11, -1) = 12$,

denn (3.1 2.1 1.3) untrscheidet sich durch Rpw = 1 vom Rpw der Zeichenklasse des Zeichens und des ästhetischen Zustandes (3.1 2.2 1.3).

Wenn man sich die durch Zeichen repräsentierten hypoästhetischen Objekte anschaut:

Rpw(3.1 2.1 1.1) = 9

Rpw(3.1 2.1 1.2) = 10

Rpw(3.1 2.1 1.3) = 11

Rpw(3.1 2.2 1.2) = 11,

dann erkennt man erstens, daß es nur vier Zeichenklassen gibt und zweitens, daß ihre repräsentationswertigen Differenzen zum Rpw von (3.1 2.2 1.3) genau der Menge

{α} = {13, 14, 15}

entspricht. Die Menge {α} gibt also die drei möglichen Werte von Information an, die durch Metatobjektivation eines Objektes zu einem Zeichen verloren geht, gemessen in semiotischer Information mittels Repräsentationswerten. Diese drei Werte messen also die im Abyss der Kontexturgrenzen zwischen Zeichen und Objekt abhanden gekommene Information; den Preis, sozusagen, den wir bezahlen müssen, wenn wir uns dazu entschließen, ein Objekt durch ein Zeichen zu subtituieren, z.B. die Zugspitze photographisch auf ein Stück Papier abbilden statt sie selbst nach Hause zu schleppen, um sie unseren Freunden zu zeigen. Dieser Abyss, diese Transzendenz zwischen Zeichen und Objekt ist das eigentliche kreative Potential, denn nur durch den kontexturellen Abbruch zwischen Zeichen und Objekt ergibt sich jene oft konstatierte Unschärfe bei der Approximation eines Objekts durch Zeichen. Könnten wir diese informationstheoretische Differenz wahrnehmen, würde allerdings wohl jenes Diktum Kafkas auf uns zutreffen, der in freier Zitierung gesagt hatte: Könnten wir alle Information wahrnehmen, die auf uns hereinbricht, wenn wir nur die Schwelle unseres Hauses übertreten - wir müßten im selben Augenblick tot zusammenbrechen.

Bibliographie

Bense, Max, Die Theorie Kafkas. Köln 1952

Bense, Max, Semiotik. Baden-Baden 1967

Bense, Max, Einführung in die informationstheoretische Ästhetik. Reinbek 1969

Bense, Max, Axiomatik und Semiotik. Baden-Baden 1981

Gfesser, Karl, Bemerkungen zum Zeichenband. In: Walther, Elisabeth/Udo Bayer, Zeichen von Zeichen für Zeichen. Baden-Baden 1990

Kronthaler, Engelbert, Grundlegung einer Mathematik der Qualitäten. Frankfurt am Main 1986

Benses Postulate 1 und 2 einer semiotischen Pro-Axiomatik

1. Benses Postulate 1 und 2 einer semiotischen "Pro-Axiomatik" (Bense 1981, S. 172) lauten

1. Jedes beliebige Etwas kann zum "Zeichen" eines anderen erklärt werden.

2. Jedes "Zeichen" kann zum Zeichen eines anderen Zeichen erklärt werden.

Dagegen lauten die entsprechenden, seinerzeit allerdings noch außerhalb eines pro-axiomatischen Systems formulierten Axiome in Bense (1967, S. 9): "Zeichen ist alles, was zum Zeichen erklärt wird und nur was zum Zeichen erklärt wird. Jedes beliebige Etwas kann (im Prinzip) zum Zeichen erklärt werden. Was zum Zeichen erklärt wird, ist selbst kein Objekt mehr, sondern Zuordnung (zu etwas, was Objekt sein kann); gewissermaßen Metaobjekt".

2. In beiden Fällen wird als nicht-definitorischer und daher unbestimmer Begriff, der in allen Axiomen bzw. Pro-Axiomen auftaucht, das "Etwas" verwendet. In der früheren Fassung ist klar, daß dieses Etwas ein Objekt ist, denn nur in diesem Fall kann das Zeichen ein Metaobjekt darstellen. Dieser Version folgt auch noch Bense ap. Bense/Walther (1973, S. 62). Da Bense auch in der späteren Fassung zwischen "Etwas"und "Zeichen" differenziert, stellt sich allerdings die Frage, warum er in 1981, nicht einfach den Begriff des Objektes verwendet. Falls nämlich das Etwas in der späteren Fassung sowohl Objekt als auch Zeichen bedeutete, wäre Pro-Axiom 2 hinfällig, und somit muß hier ebenfalls Etwas = Objekt sein. Der Grund für diese Differenz dürfte darin bestehen, daß Bense erst 1979 das Zeichen in der expliziten kategorietheoretischen Form durch

$$Z = (M \rightarrow ((M \rightarrow O) \rightarrow (M \rightarrow O \rightarrow I))$$

definierte (abgeleitet aus Bense 1979, S. 53 u. 67, eine semiotische Kategorientheorie wurde indessen bereits in Bense 1976, S. 124 ff.) skizziert. Diese nicht nur kategoriale, sondern algebraisch-kategorietheoretische Definition ermöglicht es nämlich, die semiotische Drittheit als Zeichen-im-Zeichen zu interpretieren, wodurch die Autoreproduktion des Zeichens durch den Interpretantenbezug möglich wurde. Diese stellt wiederum die Vorstufe zur Theorie der Eigenrealität, d.h. der zeichen- und realitätsthematiken Identität des

Zeichens im Gegensatz zum Objekt dar, die Bense allerdings erst in seinem letzten Buch skizzierte (Bense 1992).

3. Allerdings ist die Unterscheidung zwischen Etwas = Objekt einerseits und Zeichen andererseits überflüssig, wenn man, wie in Toth (2014) gezeigt wurde, einerseits das Objekt als Umgebung des Zeichens und andererseits das Zeichen als Umgebung des Objektes definiert, also nichts anderes tut, als das, was Bense seit der Unterscheidung zwischen Zeichenthematik und Realitätsthematik relativ zum Zeichen (vgl. Bense 1975) tat. Hier wie dort werden Zeichen und Objekte – im ersten Falle unvermittelt, d.h. präsentativ, und im zweiten Falle vermittelt, d.h. repräsentativ – rekursiv durch einander wechselseitig definiert. Daher setzt auch die 1979 gegebene Definition des Zeichens als kategorietheoretischer, "verschachtelter" Relation das Fundierungsaxiom der Zermelo-Fraenkelschen Mengentheorie außer Kraft, und es entsteht qua drittheitlichem Intepretantenbezug als triadischem Zeichen-im-Zeichen eine unendliche Hierarchie selbstreflexiver Zeichen. Wir können daher einfach die Objekt-Zeichen-Dichotomie, wie sie nach abgeschlossener thetischer Setzung besteht, systemtheoretisch isomorph zu

$S^* = [S, U]$

bzw.

$U^* = [U, S]$

durch

$Z^* = [Z, \Omega]$

bzw.

$\Omega^* = [\Omega, Z]$

definieren. Objekt und Zeichen sind damit Teile eines beide umfassenden Systems, d.h. eines neuen "Etwas" geworden, das sowohl als Zeichen als auch als Objekt interpretierbar ist, denn es spielt in einer 2-wertigen, auf der aristotelischen Logik gegründeten Dichotomie überhaupt keine Rolle, ob man in einem Schema

$L = [A, B]$

A = wahr und daher B = falsch

oder

A = falsch und daher B = wahr setzt,

davon abgesehen, daß die Bezeichnungen für Position und Negation ohnehin semiotisch arbiträr sind und die beiden Teile von L nichts als Spiegelungen voneinander sein können, da eine andere Möglichkeit durch den logischen Drittensatz ja expliziterweise ausgeschlossen wird.

4. Das Problem, das sich indessen stellt, wenn man von den systemtheoretischen Definitionen Z* und Ω* ausgeht, ist, daß aus ihnen folgt, daß nun nicht nur jedes Objekt und jedes Zeichen zum Zeichen erklärbar ist, sondern daß auch jedes Zeichen zum Objekt erklärbar ist, d.h. daß die thetische Setzung rückgängig gemacht werden kann. Da es trotz Benses "Universum der Zeichen" (Bense 1983) im Sinne eines modelltheoretischen vollständigen Systems von Zeichen, das keinen Platz für Objekte hat, außer Frage steht, daß es Objekte gibt, die nicht zu Zeichen erklärt werden oder noch nicht zu Zeichen erklärt wurden, kommen Fälle vor, bei denen mindestens Namen für Objekte eliminiert wurden, auch wenn ihre urprünglich benannten Objekte noch existieren, z.B. bei verschwundenen Ortsnamen. Obwohl nun jeder Name ein Zeichen ist, gilt die Umkehrung dieses Satzes jedoch nicht, d.h. die Tatsache, daß die Benennungssemiose für Namen reversibel ist, impliziert noch nicht, daß diese Reversibilität für Zeichen, die keine Namen sind, ebenfalls gilt. Die Lösung dieses Problems bedarf daher noch eingehender Studien.

Bibliographie

Bense, Max, Semiotik. Baden-Baden 1967

Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1975

Bense, Max, Vermittlung der Realitäten. Baden-Baden 1976

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Bense, Max, Axiomatik und Semiotik. Baden-Baden 1981

Bense, Max, Das Universum der Zeichen. Baden-Baden 1983

Bense, Max, Die Eigenrealität der Zeichen. Baden-Baden 1992

Toth, Alfred, Semiotische Objekte als Systeme von Zeichen und Objekten. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics 2014

Zahlentheoretische Definition der Zeichenrelation

1. Bereits 1975 hatte Bense den Versuch unternommen, die Isomorphie der numerischen Werte der drei peirceschen Universalkategorien Z = (1, 2, 3) und der natürlichen Zahlen mit Hilfe der Peano-Axiome zu beweisen (vgl. Bense 1975, S. 168 ff.). Allerdings geht er dabei von einer Variante der Peano-Axiome aus, welche nicht von 0, sondern von 1 als Basiszahl ausgeht. Einige Jahre später erlaubt ihm diese Entscheidung, die Universalkategorien als "Primzeichen" einzuführen (vgl. Bense 1981, S. 17 ff.). Dabei geht es jedoch nicht darum, die 1 entgegen den üblichen mathematischen Gepflogenheiten als Primzahl zu definieren, sondern darum, die drei Universalkategorien als irreduzible semiotische Entitäten und somit mit den gleichen Eigenschaften, welche in der Mathematik die Primzahlen einnehmen, zu erweisen. Daß also Bense Z = (1, 2, 3) statt Z = (2, 3, 5) setzt, liegt einzig und allein daran, daß die drei Universalkategorien von Peirce als 1-, 2- und 3-stellige Relationen eingeführt worden waren.

2. Daß die Entscheidung, von einer Variante der Peano-Axiome auszugehen, die als Basisaxiom die Zahl 1 und nicht die Zahl 0 setzt, möglicherweise ein Fehlgriff war, beschäftigte Bense allerdings bereits zur selben Zeit, da er erstmals die Isomorphie von Peanozahlen und Primzeichen zu beweisen suchte, denn im gleichen Buch schlägt er vor, "disponible" bzw. "vorthetische" Objekte als 0-stellige Relationen einzuführen (Bense 1975, S. 65 ff.). Erstaunlich ist dabei, daß Bense offenbar nicht an die Möglichkeit gedacht hatte, daß man die Peanozahlen unter Benutzung des Satzes von Wiener und Kuratowski mit Hilfe der leeren Menge definieren kann. Dabei ist

$0 := \emptyset$

$1 := \{\emptyset\} = \{0\}$

$2 := \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{0, 1\}$

$3 := \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{0, 1, 2\}$, usw.

Da Bense (1979, S. 53 u. 67) die Zeichenrelation in einer Weise definierte, welche die folgende mengentheoretische Darstellung erlaubt

$Z = (M \subset ((M \subset O) \subset (M \subset O \subset I))$, bekommen wir

$Z = (\{0\} \subset ((\{0\} \subset \{0, 1\}) \subset (\{0\} \subset \{0, 1\} \subset \{0, 1, 2\}))$,

d.h. es ist möglich, die Zeichenrelation mit Hilfe von Peanozahlen zu definieren, die wiederum durch leere Mengen definiert sind.

3. Leider hat aber dieses Verfahren einen verhängnisvollen Haken, denn bei der Definition der benseschen Zeichenrelation mit Hilfe der durch den Satz von Wiener und Kuratowski definierten Peanozahlen sind wir von einem Axiomensystem der Peanozahlen ausgegangen, das nicht 1, sondern 0 als Basiszahl benutzt. Daraus folgt, daß die Definition

$Z = (\{0\} \subset ((\{0\} \subset \{0, 1\}) \subset (\{0\} \subset \{0, 1\} \subset \{0, 1, 2\}))$

unvollständig ist, da die Zahl 0 nur als Element von Mengen, nicht aber als Zahl selbst auftritt. Z ist somit lediglich Teil der Definition eines Etwas, das wir vorerst durch X bezeichnen wollen und das wie folgt definiert ist

$X = (0 \subset (\{0\} \subset ((\{0\} \subset \{0, 1\}) \subset (\{0\} \subset \{0, 1\} \subset \{0, 1, 2\})))$,

und dieses 0 ist vermöge Bense (1975, S. 65) nichts anderes als das durch das Zeichen bezeichnete Objekt Ω, d.h. es gilt

$0 := \emptyset = \Omega$.

Mit dem Satz von Wiener und Kuratowski bekommen wir daher sogleich

$1 := \{\emptyset\} = \{0\} = \{\Omega\}$

$2 := \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{0, 1\} = \{\{\Omega\}\}$

$3 := \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{0, 1, 2\} = \{\{\{\Omega\}\}\}$,

also genau das Ergebnis, das wir in unserer Untersuchung des wissenschaftstheoretischen Stufenbaus von Ontik, Semiotik, Mathematik, Logik und Erkenntnistheorie bekommen hatten (vgl. Toth 2015), nämlich die Objekt-Hierarchie

$$\begin{array}{c} \{\{\{\Omega\}\}\} \\ \uparrow \\ \{\{\Omega\}\} \\ \uparrow \\ \{\Omega\} \\ \uparrow \\ \Omega. \end{array}$$

Da die Stufe $\{\{\{\Omega\}\}\}$ in Toth (2015) nicht berücksichtigt ist, geht also das Zeichen vermöge seines autoreproduktiv wirkenden drittheitlichen Interpretantenbezuges noch über Logik und Ontologie hinaus, denn wegen

$\{\Omega\} = Z$

kann man die Objekthierarchie auch in der Form

$$\begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} \{\{Z\}\} \\ \uparrow \\ \{Z\} \\ \uparrow \\ Z \end{array}\right] Z = (1, 2, 3) \\ \quad\;\; \uparrow \\ \quad\;\; \Omega \end{array}$$

schreiben. Benses Zeichendefinition mit Hilfe seiner Primzeichen umfaßt darin also nur die durch die Spitzklammer markierte Teilhierarchie, der somit sozusagen der Kopf in Form des durch das Zeichen bezeichneten Objektes fehlt. Der Grund dafür dürfte wiederum darin liegen, daß wir in der Peirce-Bense-Semiotik die paradoxale Situation haben, daß einerseits ein Objekt vorgegeben sein muß, bevor ein Zeichen als "Metaobjekt" (Bense 1967, S. 9) auf es abgebildet werden kann, daß andererseits aber das Objekt nach vollzogener thetischer Einführung des Zeichens nur noch als Objektbezug, d.h. als n-stellige Relation mit $n > 0$, existiert: eine notwendige Maßnahme, um das "semiotische

Universum" (Bense 1983) als ein im modelltheoretischen Sinne abgeschlossenes zu definieren. Nur kann es leider keine Zeichen ohne Objekte geben, so, wie es umgekehrt auch keine Objekte ohne Zeichen geben kann. Wer den Teufel negiert, negiert auch Gott, wie "Pfarrer Braun" in einer Folge der gleichnamigen Serie sehr zurecht bemerkt hatte. Eine Semiotik ohne Ontik ist daher ein logischer Unsinn, denn in einem Universum, das nur aus Zeichen besteht, können diese gar nicht als solche erkannt, geschweige denn analysiert oder formalisiert werden, und die pansemiotische Theorie von Peirce und dem späten Bense ist somit keine Gegenwelt zur Welt der Objekte, sondern eine logisch ausgeschlossene Scheinwelt. In Wahrheit muß man also wiederum von unserem immer noch undefinierten X ausgehen, das gleichzeitig das bezeichnete Objekt und das es bezeichnende Zeichen ausgeht, d.h. wir haben zwei Möglichkeiten, X zu definieren

$\Omega^* = [\Omega, Z]$

$Z^* = [Z, \Omega]$,

und wir wollen die Entitäten, die durch die gestirnten Symbole bezeichnet wurden, als Systeme bezeichnen. Wie man leicht nachprüft, haben wir dann sofort

$\Omega^* = (0 \subset (\{0\} \subset ((\{0\} \subset \{0, 1\}) \subset (\{0\} \subset \{0, 1\} \subset \{0, 1, 2\}))))$

$Z^* = (\{0\} \subset ((\{0\} \subset \{0, 1\}) \subset (\{0\} \subset \{0, 1\} \subset \{0, 1, 2\})) \supset 0)$.

Bibliographie

Bense, Max, Semiotik. Baden-Baden 1967

Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1975

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Bense, Max, Axiomatik und Semiotik. Baden-Baden 1981

Bense, Max, Das Universum der Zeichen. Baden-Baden 1983

Toth, Alfred, Objekte, Zeichen und Metazeichen I-II. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2015

Zur Integration von Abschlüssen in die Raumsemiotik

1. Die von Bense skizzierte Raumsemiotik (vgl. Bense/Walther 1973, S. 80) umfaßt bekanntlich lediglich den semiotischen Objektbezug. Erste Versuche, auch den semiotischen Mittelbezug und den semiotischen Interpretantenbezug in eine vollständige Raumsemiotik zu integrieren, wurden u.a. in Toth (2015a b) vorgelegt.

2. Das Hauptproblem, das freilich nicht nur die Raumsemiotik, sondern die Semiotik im allgemeinen betrifft, besteht jedoch darin, daß topologische Abschlüsse semiotisch nicht definierbar sind, obwohl die drei Interpretantenbezüge als Konnexe definiert sind und die Autoreproduktion des Zeichens ebenfalls vermöge des drittheitlich fungierenden Interpretantenbezuges ermöglicht wird, da sich das drittheitliche Zeichen somit vermöge seines Interpretantenbezuges selbst enthält. Die von Bense (1979, S. 53 u. 67) gegebene Zeichendefinition

$$Z = (M \rightarrow ((M \rightarrow O) \rightarrow (M \rightarrow O \rightarrow I)))$$

ist somit eine selbstenthaltende und daher dem Fundierungsaxiom der Mengentheorie widersprechende "Relation über Relationen", wie Bense sie selbst genannt hat. Das Zeichen widerspiegelt also die für das ganze "semiotische Universum" (Bense 1983) gültigen drei modelltheoretischen Axiome der Extensivität, Monotonie und Abgeschlossenheit, aber die Abgeschlossenheit muß über das System selbst definiert werden, da es somit außerhalb des Zeichens nichts gibt, in Sonderheit gibt es keine Objekte innerhalb des semiotischen Universums, denn sonst müßte es Abbildungen zwischen Zeichen und Objekten geben, welche den modelltheoretischen Axiomen widersprächen. So ersetzt der semiotische Objektbezug innerhalb von Z und die Realitätsthematik innerhalb jedes semiotischen Dualsystems das Objekt, das paradoxerweise dennoch der Zeichensetzung "vorgegeben" (vgl. Bense 1967, S. 9) sein muß, da es ohne Objekte ebenso sinnlos ist, von Zeichen zu sprechen, wie es sinnlos ist, ohne Zeichen von Objekten zu sprechen. So, wie jedes semiotische Dualsystem selbst-abgeschlossen ist, ist auch das semiotische Universum vermöge Selbstenthaltung selbst-abgeschlossen.

3. Da eine solche Pansemiotik außer Stande ist, zwischen wahrgenommenen Objekten und Zeichen zu unterscheiden – nach Peirce gilt ja bekanntlich, daß wir alles, was wir wahrnehmen, als Zeichen wahrnehmen – und da diese Nicht-

Unterscheidung nachweislich falsch ist, da die Wahrnehmung ein unwillkürlicher, die Zeichensetzung aber ein willkürlicher Prozeß ist, darf die Abgeschlossenheit von Zeichen nicht Teil des semiotischen Universums sein, sondern sie muß als Rand zwischen Zeichen und Objekt bestimmt werden. Da Objekt und Zeichen der logischen Dichotomie $L = [0, 1]$ isomorph sind, also sich wie These und Antithese verhalten, folgt, daß Abschlüsse als Synthesen von L bestimmt werden müssen (vgl. Toth 2015c). Interessanterweise hatte Bense selbst das hegelsche dialektische Schema in die Semiotik eingeführt (vgl. Bense 1975, S. 28), aber keine die Objekt-Zeichen-Relation betreffenden Schlüsse daraus gezogen. Wenn wir also von den beiden möglichen semiotisch-ontischen bzw. ontisch-semiotischen Dichotomien

$Z^* = [Z, \Omega]$

$\Omega^* = [\Omega, Z]$

ausgehen, erhalten wir folgende dialektischen Schemata

$$\begin{array}{ccccccc} & \Omega^* & & \qquad & & Z^* & \\ \Omega & & Z & \qquad & Z & & \Omega. \end{array}$$

Damit sind also die Positionen von Ω und Z innerhalb von $L = [\Omega, Z]$ erstmals relevant geworden. In Sonderheit gilt also

$L = [\Omega, Z] \neq L = [Z, \Omega]$

und somit gilt natürlich für den Rand zwischen Objekt und Zeichen

$R[\Omega, Z] \neq R[Z, \Omega] \neq \emptyset$.

Ω^* und Z^* stellen somit eine Art von Tertia dar, welche insofern gegen die 2-wertige aristotelische Logik verstoßen, als sie nicht nur eine Aussage, sondern auch deren Negat und damit die Transzendenz zwischen den beiden Werten enthalten. Diese Tertia designieren also zwar natürlich keinen dritten Wert, sind also nicht substantiell, aber differentiell, d.h. sie heben die lineare Austauschbarkeit der beiden Werte von $L = [\Omega, Z]$ auf. Damit bekommen wir eine Einbettungstransformation, welche $L = [\Omega, Z]$ auf ein Quadrupel von paarweise konversen Relationen abbildet

$L = [\Omega, Z] \rightarrow$

$$\left(\begin{array}{ll} L_1 = [\Omega, [Z]] & L_1^{-1} = [[Z], \Omega] \\ L_2 = [[\Omega], Z] & L_2^{-1} = [Z, [\Omega]] \end{array} \right).$$

Diese vier einbettungstheoretisch geschiedenen Relationen sind somit die vier Abschlußtypen von Ω^* und Z^*, d.h. raumsemiotische Abschlüsse lassen sich direkt durch Ω^* und Z^* definieren.

Bibliographie

Bense, Max, Semiotik. Baden-Baden 1967

Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1975

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Bense, Max, Das Universum der Zeichen. Baden-Baden 1983

Bense, Max/Walther, Elisabeth, Wörterbuch der Semiotik. Köln 1973

Toth, Alfred, Zum vollständigen System einer Raumsemiotik. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2015a

Toth, Alfred, Raumsemiotik von Konnexität. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2015b

Toth, Alfred, Die semiotischen Synthesen. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2015c

Ein neues Zeichenschema

1. Das peircesche Zeichenschema Z wird üblicherweise als eine triadische Relation über einer 1-stelligen Relation M, einer 2-stelligen Relation O und einer 3-stelligen Relation I definiert (vgl. z.B. Walther 1979, S. 50)

$Z = (.1., .2., .3.)$.

Entsprechend wird Z durch das bekannte semiotische Dreieck geometrisch dargestellt. Wegen der Stelligkeit der Kategorien gilt jedoch

$Z = (.1. \subset .2. \subset .3.)$,

was in der frühen Semiotik durch

$Z = ((M \rightarrow O) \rightarrow I)$

in Semiosenschreibweise ausgedrückt wurde (vgl. Walther 1979, S. 50).

Nun ist aber, was erst Bense (1979, S. 53 u. 67) bemerkte, die drittheitliche Kategorie I nichts anderes als das "Zeichen im Zeichen" (das die Autoreproduktion garantiert), d.h. aus

$I = (M \rightarrow O \rightarrow I)$

folgt direkt

$Z = ((M \rightarrow O) \rightarrow (M \rightarrow O \rightarrow I))$.

Diese Relation ist jedoch im Widerspruch zu $Z = (.1., .2., .3.)$ dyadisch, da beim Wechsel von der Kategorien- zur Semiosenschreibweise nun die kategoriale Erstheit fehlt. Die vollständige semiosisch notierte Zeichenrelation ist somit

$Z = (M \rightarrow ((M \rightarrow O) \rightarrow ((M \rightarrow O \rightarrow I))))$.

2. Die letztere Zeichendefinition stellt die Semiotik jedoch vor zwei nicht zu unterschätzende mathematische Probleme.

2.1. Z ist selbstenthaltend, d.h. das Fundierungsaxiom der Zermelo-Fraenkelschen Mengenlehre ist aufgehoben.

2.2. Es gibt keine Möglichkeit mehr, die von Bense (1981, S. 17 ff.) als "Primzeichen" bezeichneten Zeichenzahlen mit Hilfe der Peano-Axiome zu defininieren (vgl. Bense 1975, S. 167 ff.), denn die Peanozahlen werden bekanntlich, wenn man sie mit 1 beginnen läßt, wie folgt gezählt

$P = 1, 2, 3, \ldots$.

Hingegen können die Zahlen, die

$Z = (\underline{M} \rightarrow ((\underline{M \rightarrow O}) \rightarrow ((\underline{M \rightarrow O \rightarrow I}))))$

zugrunde liegen, wie folgt gezählt werden

$\underline{(1)}$, (1, 1), $\underline{(1, 2)}$, (1, 1, 1), (1, 1, 2), $\underline{(1, 2, 3)}$.

Dies sind aber genau die Protozahlen (sowie, da die triadische Semiotik eine Kontextur der Länge K = 3 bestimmt), auch noch die Deuterozahlen, wie sie Gotthard Günther als qualitative Strukturzahlen für die polykontexturale Logik eingeführt hatte (vgl. Günther 1979). Die einzige Differenz zwischen den Zeichenzahlen und den Proto- bzw. Deuterozahlen für K = 3 ist das Fehlen der sog. mediativen Zahlen (1, 1), (1,1, 1) und (1, 1, 2) bei den Zeichenzahlen.

2.3. Nun gehören bekanntlich zu den qualitativen Strukturzahlen neben den Proto- und den Deuterozahlen noch die Tritozahlen (ein Überblick über alle drei Strukturzahen für die Kontexturen K = 1 bis K = 5 findet sich in der "Mathematik der Qualitäten" von Kronthaler (1986, S. 34)). Da sowohl innerhalb jeder Kontextur K = n als auch in Hierarchien von Kontexturen $(K = n) \subset (K = (n+1)) \subset \ldots \subset (K = (n + m))$ die Inklusionsordnung

Protozahlen ⊂ Deuterozahlen ⊂ Tritozahlen gilt,

bleiben also die Protozahlen in den Deuterozahlen und beide in den Tritozahlen erhalten, oder anders ausgedrückt, es findet eine topologische Faserung von den Proto- über die Deutero- zu den Tritozahlen statt. Damit können wir die obige Proto- und Deuterozählweise der Zeichenzahlen wie folgt in die entsprechende Tritozählweise übersetzen

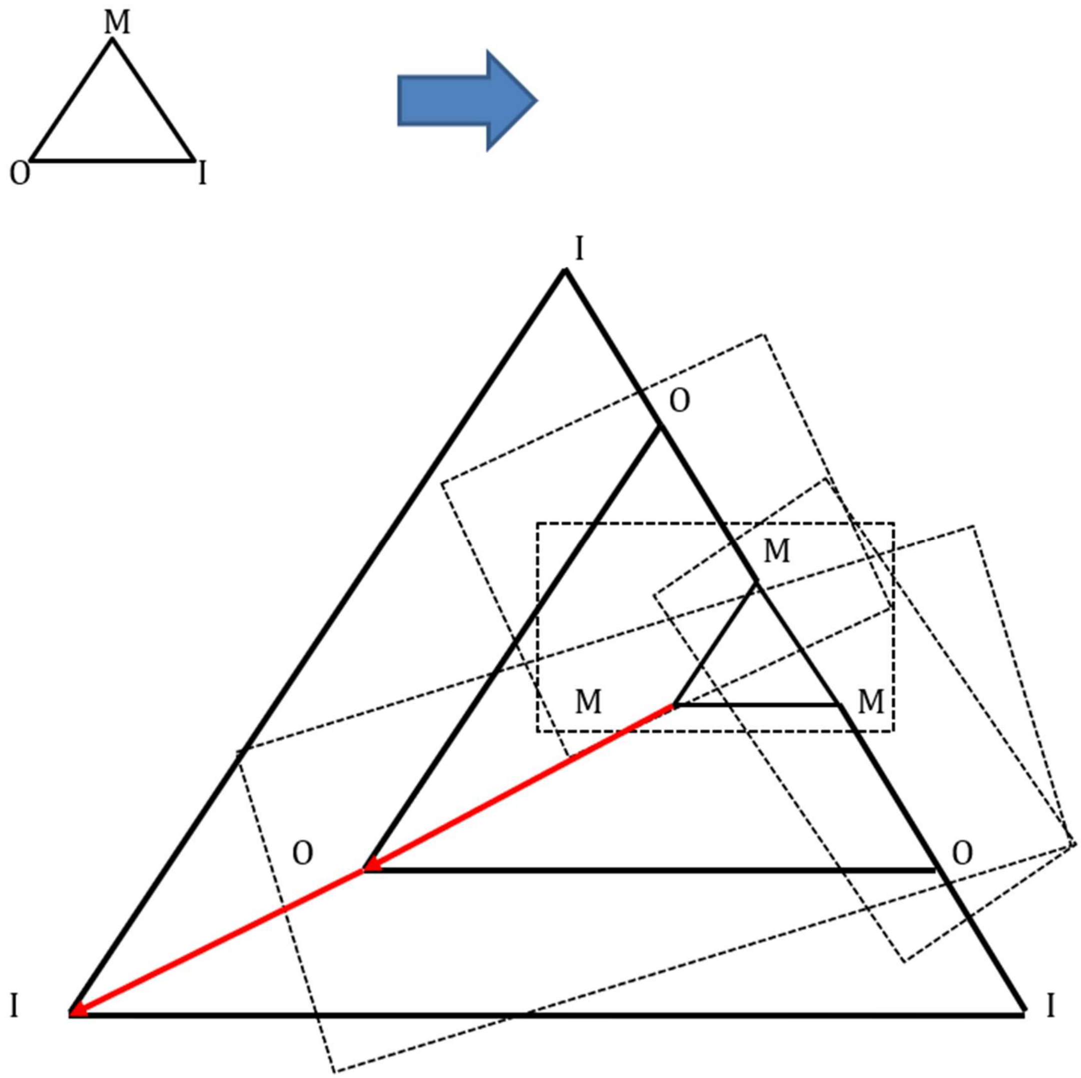
$\underline{(1)}$, (1, 1), $\underline{(1, 2)}$, (1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 1), (1, 2, 2) $\underline{(1, 2, 3)}$.

Dies ist also die vollständige qualitative Zählung der drei Zeichenzahlen von

$Z = (\underline{M} \rightarrow ((\underline{M \rightarrow O}) \rightarrow ((\underline{M \rightarrow O \rightarrow I}))))$

und nicht die Peano-Zählung P = (1, 2, 3).

3. Da, wie bereits oben vermöge Bense (1979, S. 53 u. 67) bemerkt wurde, das semiotische Dreiecksmodell, das keine Inklusionen der Kategorien und der Semiosen enthält, entfällt, kann man nun auf der Basis der qualitativen Tritozahlen durch die folgende Transformation ein neues Zeichenschema konstruieren.



In diesem Schema sind die nicht-eingebetteten "fundamentalen" Kategorien bzw. ihre Semiosen rot markiert, und alle mediativen Zahlen sind mit der minimalen Anzahl von, topologische Räume markierenden, Kästchen markiert. Dies ist übrigens das erste Mal, daß mengentheoretische Zahlenverhältnisse innerhalb der Mathematik der Qualitäten dargestellt werden.

Bibliographie

Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1975

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Bense, Max, Axiomatik und Semiotik. Baden-Baden 1981

Günther, Gotthard, Beiträge zur Grundlegung einer operationsfähigen Dialektik. Bd. 2. Hamburg 1980

Kronthaler, Engelbert, Grundlegung einer Mathematik der Qualitäten. Frankfurt am Main 1986

Walther, Elisabeth, Allgemeine Zeichenlehre. 2. Aufl. Stuttgart 1979

Zur knotentheoretischen Struktur der Zeichenrelation

1. Es ist bemerkenswert, daß die naive Vorstellung einer triadischen Zeichenrelation der Form

$Z = (M, O, I)$

mit linearer Ordnung der Teilrelationen erst 1979 durch Bense präzisiert wurde, der die Zeichenrelation als "Relation über Relationen" in der folgenden Form einführte (Bense 1979, S. 53, vgl. auch S. 67)

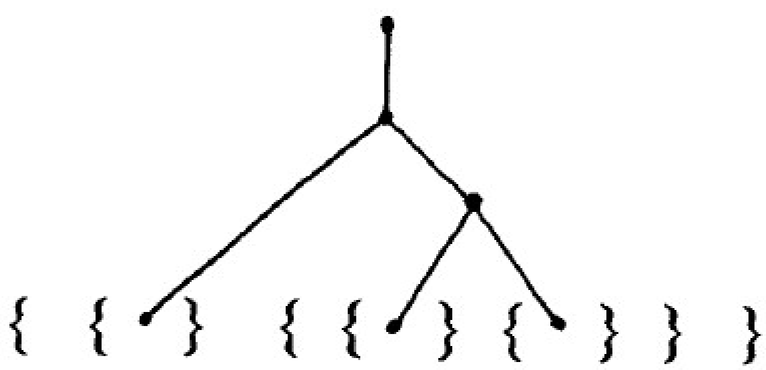
ZR (M, O, I) =
ZR (M, M=>O, M=>O.=>I) =
ZR (mon. Rel., dyad. Rel., triad. Rel.)
ZR (.1. .2. .3.) =

$$ZR \quad \begin{array}{ccccccccc} 1.1 & 1.2 & 1.3, & 1.1 & 1.2 & 1.3, & 1.1 & 1.2 & 1.3 \\ & & & 2.1 & 2.2 & 2.3 & 2.1 & 2.2 & 2.3 \\ & & & & & & 3.1 & 3.2 & 3.3 \end{array}.$$

2. Somit kann man Z selbstenthaltend durch

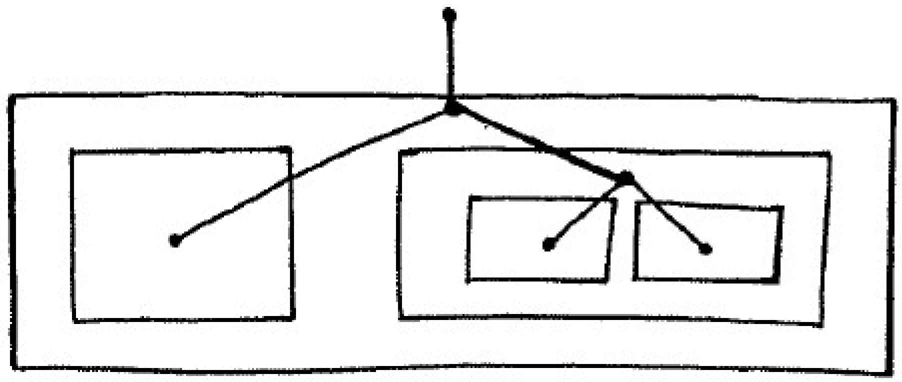
$Z = (M \rightarrow ((M \rightarrow O) \rightarrow (M \rightarrow O \rightarrow I)))$

definieren. Da die Gültigkeit des Satzes von Wiener und Kuratowski für die Semiotik bereits in Toth (2006) bewiesen worden, ist Benses Definition von Z dem folgenden Stemma aus Kauffman (1995, S. 7) isomorph

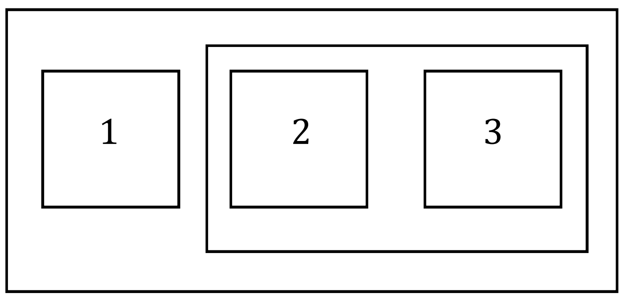


,

und dieses Stemma kann in der Form der folgenden Verschachtelungsmengen dargestellt werden (der Begriff der "verschachtelten Relation" wurde von Bense, mdl., wiederholt gebraucht)

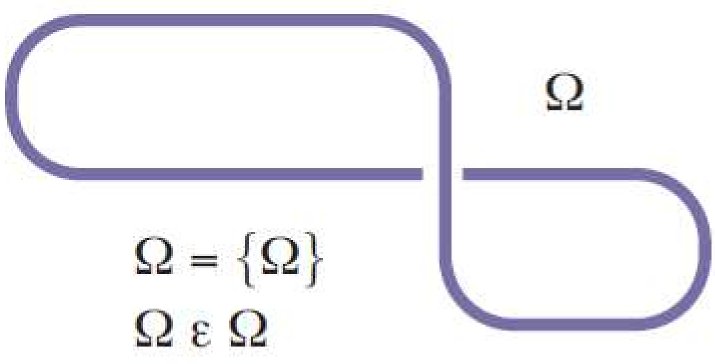


Genauer haben wir also

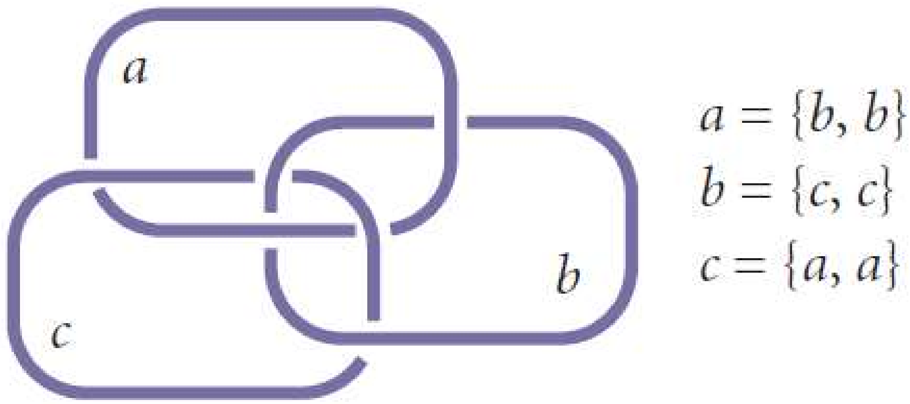


.

Bekanntlich gilt für selbstenthaltende Definitionen das Fundierungsaxiom der Zermelo-Fraenkelschen Mengentheorie nicht (vgl. Aczel 1988). Diesen Sachverhalt drückt der folgende Knoten aus (Kauffman 2009, S. 130)

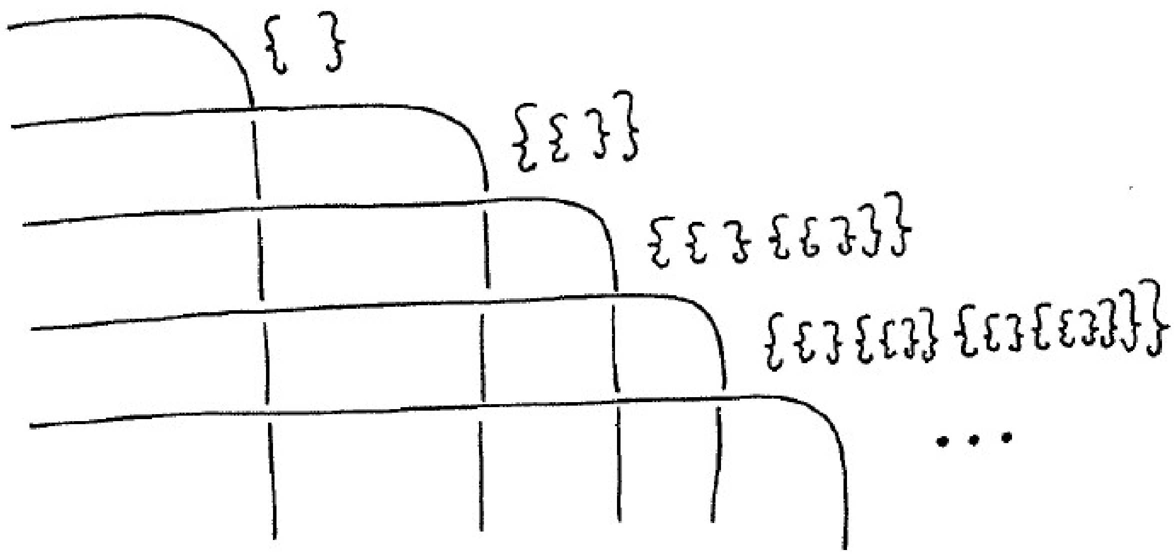


Da die Semiotik drei Identitäten besitzt, die aus der Hauptdiagonalen der von Bense (1975, S. 37) eingeführten semiotischen Matrix ablesbar sind, die Bense (1992) in Zusammenhang mit dem eigenrealen Dualsystem setzte und mit Peirce als Kategorienklasse bezeichnete, haben wir sogar dreifache Selbstenthaltung



(vgl. Kauffman 2009, S. 130) und knotentheoretisch interpretiert Borromäische Ringe, d.h. solche, für welche die Eigenschaft gilt, daß das Loslösen des einen Ringes auch das Loslösen der beiden anderen Ringe nach sich zieht. Ein Zeichen, das nicht alle drei Identitäten besitzt, ist eben kein Zeichen, genau so wenig wie eine n-adische Zeichenrelation mit $n < 3$ eine Zeichenrelation ist.

Rechnet man die leere Menge ebenfalls als Zeichen (vgl. Toth 2006) – denn auch die Abwesenheit eines Zeichens ist nach einem von E. Walther (1989, mdl.) formulierten Axiom ein Zeichen –, dann kann man folgende Korrespondenzen zwischen der Definition der semiotischen Teilrelationen als ungeordneten Mengen und Knoten feststellen (vgl. Kauffmann 1995, S. 34)



so dass wir also

$Z = \{ \{\} \{ \{\} \} \{ \{\} \{ \{\} \}\}\} \cong (M \rightarrow ((M \rightarrow O) \rightarrow (M \rightarrow O \rightarrow I)))$

haben.

Bibliographie

Aczel, Peter, Non-Well-Founded Sets. Stanford, CA, 1988

Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1975

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Bense, Max, Die Eigenrealität der Zeichen. Baden-Baden 1992

Kauffman, Louis H., Knot Logic. In: Knots and Applications 6, 1995, S. 1-110.

Kauffman, Louis H., Reflexivity and Eigenform. In: Constructivist Foundations 4/3, 2009, S. 121-137

Toth, Alfred, Grundlegung einer mathematischen Semiotik. Klagenfurt 2006

System und Umgebung in Ontik und in Semiotik

1. Bekanntlich ist die traditionelle Definition des Systems dyadisch: ein System ist ein Etwas, das eine Umgebung hat

X = [S, U].

Ebenfalls verbreitet ist bekanntlich die dyadische Definition des Zeichens: ein Zeichen ist ein Etwas, das ein Objekt bezeichnet

Y = [Z, O].

Wie man leicht erkennt, handelt es sich jedoch bei beiden Definitionen, der ontischen Definition X und der semiotischen Definition Y, um verkappte triadische Relationen.

2. Die Frage ist allerdings, wie man X und Y bestimmen soll. In beiden Fällen gibt es zwei Möglichkeiten. Für die ontische Definition ergeben sich

S* = [S, U]

U* = [U, S].

Für die semiotische Definition ergeben sich

Z* = [Z, O]

O* = [O, Z].

Dabei wird also die in der Frühgeschichte der Stuttgarter Semiotik benutzte selbstenthaltende Zeichendefinition der Form

Zf = f(Z, O, I)

vermieden, insofern S* bzw. U* und Z* bzw. O* einer anderen mengentheoretischen hierarchischen Stufe angehören, vgl. Klaus (1973).

3. Indessen gehen sowohl Klaus (1973) als auch Menne (1992) von der ontisch-semiotischen Isomorphie aus. Für die Semiotik kann dies nach dem bisher Gesagten nur die folgende Menge von Teilisomorphien bedeuten

M ≌ U

O ≌ S,

d.h. der als Mittelbezug repräsentierte Zeichenträger wird als Umgebung des bezeichneten Objektes, das selbst als System fungiert, aufgefaßt. Nun ist allerdings, wie allbekannt, die peirce-bensesche Zeichenrelation nicht dyadisch, sondern triadisch. Hier ergibt sich nun, freilich nicht so überraschend (vgl. Toth 2015), die Möglichkeit des Nachweises der Isomorphie von ontischen Abschlüssen $E \subset (S^* = [S, U, E])$ und semiotischen Konnexen I, d.h.

$$I \quad \cong \quad E,$$

so daß wir also folgende ontisch-semiotische Isomorphie bekommen

$$(Z \cong S^*) = (M, O, I) \cong (U, S, E).$$

4. Ein Problem ergibt sich durch die Bestimmung einer anderen Form von mengentheoretischer Selbstenthaltung vermöge Bense (1979, S. 53). Für die semiotischen Teilrelatiionen von Z gilt nämlich

$$M \subset O. \subset I,$$

während für S* per definitionem

$$U \not\subset S. \subset E$$

gilt. Das bedeutet also, daß das System im Gegensatz zum bezeichneten Objekt kein Teil seiner eigenen Umgebung bildet. Der Grund liegt natürlich darin, daß das System als ontisches Objekt nicht referiert, während das System als semiotisches Objekt referiert. Hingegen gilt die Inklusionsrelation im Gegensatz zu Umgebungen für Nachbarschaften (vgl. Toth 2014), d.h. wir haben

$$N \subset S. \subset E.$$

Da die Nachbarschaftsrelation eine spezielle Form der Umgebungsrelation ist, ergibt sich also die vollständige ontisch-semiotische Isomorphie einschließlich Selbstenthaltung auf die folgende Weise

$$M \quad \cong \quad N$$

$$O \quad \cong \quad S,$$

$$I \quad \cong \quad E$$

mit

$$(M \subset O. \subset I) \cong (N \subset S. \subset E).$$

Bibliographie

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Klaus, Georg, Semiotik und Erkenntnistheorie. 4. Aufl. München 1973

Menne, Albert, Einführung in die Methodologie. 3. Aufl. Darmstadt 1992

Toth, Alfred, Umgebung, Nachbarschaft und ontische Konnexe. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2014

Toth, Alfred, Zu einer triadischen System-Definition. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2015

Die Semiotik als eine Theorie von Relationen über Relationen

1. Eine Zeichenklasse hat nach der Peirce-Bense-Semiotik die allgemeine Form

ZKl = (3.x, 2.y, 1.z)

mit $x \leqq y \leqq z$.

ZKl wird somit durch 4 Prinzipien restringiert:

1.1. Das Prinzip der Triadizität

Es besagt bekanntlich, daß nach einem Satz von Peirce jede n-adische Relation auf eine triadische Relation reduziert werden kann.

1.2. Das Prinzip der paarweisen Differenz der Kategorien

Dieses Prinzip besagt, daß von den drei sog. peirceschen Universalkategorien M, O und I jede Kategorie genau 1 mal in einer ZKl vorkommen muß.

1.3. Das Prinzip der Drittheit als oberer Schranke

Keine Zeichenrelation kann mehr als EIN M, EIN O und EIN I aufweisen. (Damit wird im Grunde die Monokontexturalität der Semiotik begründet, da wie die Logik also auch die Semiotik nur über 1 Objekt- (O) und 1 Subjekt-Position (I) verfügt. Logik und Semiotik unterscheiden sich damit formal nur durch das den Zeichenträger repräsentierende Medium (M), dem in der 2-wertigen aristotelischen Logik kein Wert korrespondiert.)

1.4. Das Prinzip der trichotomischen Inklusion

Dieses Prinzip wirkt als topologischer Filter, da über der Menge P = (1, 2, 3) der von Bense (1981, S. 17 ff.) eingeführten Zeichenzahlen $3^3 = 27$ semiotische Relation erzeugbar sind. Durch $x \leqq y \leqq z$ werden allerdings nur 10 dieser semiotischen Relationen als Zeichenklassen definiert.

2. Die vielleicht wesentlichste Erkenntnis Benses zur SEMIOTIK ALS EINER SPEZIELLEN THEORIE VON RELATIONEN besteht darin, daß er die Menge P als „Relation über Relationen“ oder auch als „verschachtelte Relation“ definiert hatte (vgl. Bense 1979, S. 53 u. 68).

$P = (1 \rightarrow ((1 \rightarrow 2) \rightarrow (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3)))$.

In P wird also eine monadische Relation auf eine dyadische Relation abgebildet, welche eine Abbildung einer dyadischen auf eine triadische Relation darstellt

$^3R = (^1R \rightarrow (^2R \rightarrow {}^3R))$.

Die triadische Relation, mit Hilfe derer das Zeichen definiert wird, enthält somit sich selbst und alle ihre Teilrelationen. Mengentheoretisch bedeutet dies, daß damit das Fundierungsaxiom

Axiom of Regularity

$(\forall x)[(\exists a)(a \in x) \rightarrow (\exists y)(y \in x \;\&\; \sim(\exists z)(z \in x \;\&\; z \in y))]$

If you have a set x
And x is not empty
Then one of x's members y
Shares no members in common with x.

aufgehoben ist. Offenbar ist es also möglich, DIE SEMIOTIK ALS DIE THEORIE VON RELATIONEN ÜBER RELATIONEN zu definieren. In Sonderheit enthält ja ^3R sich selbst, d.h. das Zeichen ist im Zeichen definitorisch enthalten, wodurch die bereits von Bense festgestellte Autoreproduktivität herrührt: Das Zeichen „ist selbstreferierend im Sinne der Selbstgegebenheit des Seienden“ (1992, S. 16).

$P = (1, 2, 3)$

$Z^0{}_2 = (1 \rightarrow ((1 \rightarrow 2 \rightarrow 3) \rightarrow (1 \rightarrow 2)))$

$Z^1{}_2 = (1 \rightarrow ((1 \rightarrow (1 \rightarrow 2) \rightarrow (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3)) \rightarrow (1 \rightarrow (1 \rightarrow 2))))$

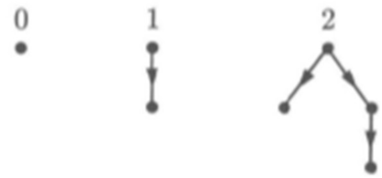
$Z^2{}_2 = (1 \rightarrow ((1 \rightarrow (1 \rightarrow (1 \rightarrow 2)) \rightarrow (1 \rightarrow (1 \rightarrow 2) \rightarrow (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3))) \rightarrow (1 \rightarrow (1 \rightarrow (1 \rightarrow 2)))))$

$Z^3{}_2 = (1 \rightarrow ((1 \rightarrow (1 \rightarrow (1 \rightarrow (1 \rightarrow 2))) \rightarrow (1 \rightarrow (1 \rightarrow (1 \rightarrow 2)) \rightarrow (1 \rightarrow (1 \rightarrow 2) \rightarrow (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3)))) \rightarrow (1 \rightarrow (1 \rightarrow (1 \rightarrow (1 \rightarrow 2))))))$

$Z^4{}_2 = (1 \rightarrow ((1 \rightarrow (1 \rightarrow (1 \rightarrow (1 \rightarrow (1 \rightarrow 2)))) \rightarrow (1 \rightarrow (1 \rightarrow (1 \rightarrow (1 \rightarrow 2))) \rightarrow (1 \rightarrow (1 \rightarrow (1 \rightarrow 2)) \rightarrow (1 \rightarrow (1 \rightarrow 2) \rightarrow (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3))))) \rightarrow (1 \rightarrow (1 \rightarrow (1 \rightarrow (1 \rightarrow (1 \rightarrow 2)))))))$

$Z^5{}_2 = (1 \rightarrow ((1 \rightarrow (1 \rightarrow (1 \rightarrow (1 \rightarrow (1 \rightarrow (1 \rightarrow 2))))) \rightarrow (1 \rightarrow (1 \rightarrow (1 \rightarrow (1 \rightarrow (1 \rightarrow 2)))) \rightarrow (1 \rightarrow (1 \rightarrow (1 \rightarrow (1 \rightarrow 2))) \rightarrow (1 \rightarrow (1 \rightarrow (1 \rightarrow 2)) \rightarrow (1 \rightarrow (1 \rightarrow 2) \rightarrow (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3)))))) \rightarrow (1 \rightarrow (1 \rightarrow (1 \rightarrow (1 \rightarrow (1 \rightarrow (1 \rightarrow 2))))))))$, usw.

Aczel (1988, S. 3) hatte die drei ersten Peanozahlen (die er 0, 1, 2 statt 1, 2, 3) schreibt, durch folgende gerichtete Graphen definiert



2 (3) entspricht somit bis auf die Richtung der Abbildungen der Teilrelationen dem peirceschen Zeichenmodell.

Aczel ersetzt somit das Fundierungsaxiom (FA) durch das Anti-Fundierungsaxiom (AFA)

The Anti-Foundation Axiom, AFA:

Every graph has a unique decoration.

AFA ist also nichts anderes als die Negation von Mostowksis Kollaps-Lemma

Mostowski's Collapsing Lemma:

Every well-founded graph has a unique decoration.

3. Nachdem die Autoreflexivität des Zeichens mengentheoretisch definiert ist und die Semiotik als „a theory of self-embedding relations" definierbar geworden ist, sollte man die Frage stellen, ob die vier einleitend genannten restriktiven Prinzipien in einer solchen Theorie autoreflexiver Relationen weiterhin aufrecht erhalten werden können.

3.1. Die Prinzip der Triadizität und der Drittheit als oberer Schranke wurden bereits in Toth (2007, S. 173 ff.) widerlegt. Es gibt somit 1-adische, 2-adische, 3-adische, 4-adische, ..., n-adische Semiotiken.

3.2. Die Prinzipien der paarweisen Differenz der Kategorien und der Drittheit als oberer Schranke sind unsinnig, da ein Mittelbezug mehrdeutig sein kann (Homonymie), ein Objektbezug (Syononymie) und da die Restriktion auf 1 Interpretantenbezug die Ich- vs. Du-Deixis und damit das erkenntnistheoretische subjektive und objektive Subjekt kollabieren lassen. Im Einklang mit der

Annahme der Polykontexturalitätstheorie, deren Logik auf der unendlichen Iterierbarkeit der Subjektposition beruht, gibt es somit weder eine Beschränkung hinsichtlich M, noch O noch I. Wir haben somit für ein Zeichen Z

$Z = ((M_1, ..., M_n), (O_1, ..., O_n), (I_1, ..., I_n))$.

3.3. Das Prinzip der trichotomischen Inklusion, ist wie bereits in zahlreichen Arbeitet aufgezeigt worden war, eine ad hoc-Annahme, die weder semiotisch, noch logisch noch mathematisch gerechtfertig werden kann. Aus ${}^3R = ({}^1R \rightarrow ({}^2R \rightarrow {}^3R))$ folgt ja gerade die Selbstenhaltung der Kategorien bzw. Zeichenzahlen und die Trichotomien sind ja per definitionem nichts anderes als die Konversen der Tríaden, d.h. wir haben

$T = P^{-1} = (((1 \rightarrow 2 \rightarrow 1) \rightarrow (1 \rightarrow 2)) \rightarrow 1)$.

Damit bekommen wir für die Abbildung von Triaden auf Trichotomien

$P \rightarrow P^{-1} = ((1 \rightarrow ((1 \rightarrow 2) \rightarrow (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3))) \rightarrow (((1 \rightarrow 2 \rightarrow 1) \rightarrow (1 \rightarrow 2)) \rightarrow 1))$

und für die Abbildung von Trichotomien auf Triaden

$P^{-1} \rightarrow P = ((((1 \rightarrow 2 \rightarrow 1) \rightarrow (1 \rightarrow 2)) \rightarrow 1) \rightarrow (1 \rightarrow ((1 \rightarrow 2) \rightarrow (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3))))$.

Bibliographie

Aczel, Peter, Non-Well-Founded Sets. Stanford, CA, 1988

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Bense, Max, Axiomatik und Semiotik. Baden-Baden 1981

Bense, Max, Die Eigenrealität der Zeichen. Baden-Baden 1992

Toth, Alfred, Zwischen den Kontexturen. Klagenfurt 2007

Semiotik als Theorie gradativer Relationalität

1. In Toth (2019) hatten wir uns gefragt, was denn eine Relation zur semiotischen Relation macht. Nun hatte zwar Bense (1981, S. 17 ff.) das Zeichen als triadische Relation über Primzeichen oder Zeichenzahlen eingeführt

$Z = (1, 2, 3)$

und die Isomorphie der Zeichenzahlen mit den Peanozahlen bereits in Bense (1975, S. 167 ff.) aufgezeigt, allein, während die Peanozahlen die Folge

$P = (1, 2, 3, ..., n)$

bilden, bilden die Zeichenzahlen eine ganz andere Folge

$Z = (1, ((1, 2), (1, 2, 3)), (1, ((1, 2), ((1, 2, 3), (1, 2, 3, 4))), ...),$

insofern

$2 := (1 \rightarrow 2)$

$3 := (1 \rightarrow 2) \rightarrow (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3)$, usw.

definiert sind. Vgl. dazu Bense (1979, S. 53):

$ZR(M, O, I) =$

$ZR(M, M \rightarrow O, M \rightarrow O \rightarrow I) =$

ZR(mon. Rel., dyad. Rel., triad. Rel.)

ZR(.1., .2., .3.) =

1.1	1.2	1.3	1.1	1.2	1.3	1.1	1.2	1.3
			2.1	2.2	2.3	2.1	2.2	2.3
						3.1	3.2	3.3

„Mit dieser Notation wird endgültig deutlich, daß Repräsentation auf Semiotizität und Semiotizität auf Gradation der Relationalität beruht“ (Bense 1979, S. 53). MAN DARF SOMIT EINE SEMIOTISCHE RELATION ALS EINE GRADATIVE RELATION DEFINIEREN. Und da somit gilt

$Z = (1, 2, 3) = (1 \rightarrow ((1 \rightarrow 2) \rightarrow (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3))),$

ist Z also eine Relation, die sich selbst und alle ihre Teilrelationen enthält. Als selbstreflexive Relation kann sie allerdings nur mittels einer Mengentheorie beschrieben werden, für die das Fundierungsaxiom nicht gilt (vgl. Aczel 1988).

2. Im folgenden gehen wir von der Menge der 3! = 6 Permutationen von Z = (1, 2, 3) aus

$P_1 = (1, 2, 3)$

$P_2 = (1, 3, 2)$

$P_3 = (2, 1, 3)$

$P_4 = (2, 3, 1)$

$P_5 = (3, 1, 2)$

$P_6 = (3, 2, 1)$.

Wegen

$Z = (1, 2, 3) = (1 \rightarrow ((1 \rightarrow 2) \rightarrow (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3)))$

bekommen wir sofort

$Z_1 = (1 \rightarrow ((1 \rightarrow 2) \rightarrow (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3)))$

$Z_2 = (1 \rightarrow ((1 \rightarrow 2 \rightarrow 3) \rightarrow (1 \rightarrow 2)))$

$Z_3 = ((1 \rightarrow 2) \rightarrow (1 \rightarrow (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3)))$

$Z_4 = ((1 \rightarrow 2) \rightarrow ((1 \rightarrow 2 \rightarrow 3) \rightarrow 1))$

$Z_5 = ((1 \rightarrow 2 \rightarrow 3) \rightarrow (1 \rightarrow (1 \rightarrow 2)))$

$Z_6 = ((1 \rightarrow 2 \rightarrow 3) \rightarrow ((1 \rightarrow 2) \rightarrow 1))$.

Wir können nun Gradationsstufen einführen, da die oben definierten Abbildungen für 2 und 3 natürlich unendlich oft iterierbar sind. In jedem Z^0_1 bezeichnet das Subskript die Permutation aus (Z_1 ... Z_6) und das Superskript die Gradationsstufe. Als gradative 0-Stufe wird die Permutation vor Einsetzung festgesetzt.

2.1. Z_1

$Z^0{}_1 = (1 \to ((1 \to 2) \to (1 \to 2 \to 3)))$

$Z^1{}_1 = (1 \to ((1 \to 2) \to (1 \to ((1 \to 2) \to (1 \to 2 \to 3))))$

$Z^2{}_1 = (1 \to ((1 \to (1 \to 2)) \to (1 \to ((1 \to (1 \to 2)) \to (1 \to (1 \to 2) \to (1 \to 2 \to 3)))))$

$Z^3{}_1 = (1 \to ((1 \to (1 \to (1 \to 2))) \to (1 \to ((1 \to (1 \to (1 \to 2))) \to (1 \to (1 \to (1 \to 2)) \to (1 \to (1 \to 2) \to (1 \to 2 \to 3))))))$

$Z^4{}_1 = (1 \to ((1 \to (1 \to (1 \to (1 \to 2)))) \to (1 \to ((1 \to (1 \to (1 \to (1 \to 2)))) \to (1 \to (1 \to (1 \to (1 \to 2))) \to (1 \to (1 \to (1 \to 2)) \to (1 \to (1 \to 2) \to (1 \to 2 \to 3)))))))$

$Z^5{}_1 = (1 \to ((1 \to (1 \to (1 \to (1 \to (1 \to 2))))) \to (1 \to ((1 \to (1 \to (1 \to (1 \to (1 \to 2))))) \to (1 \to (1 \to (1 \to (1 \to (1 \to 2)))) \to (1 \to (1 \to (1 \to (1 \to 2))) \to (1 \to (1 \to (1 \to 2)) \to (1 \to (1 \to 2) \to (1 \to 2 \to 3))))))))$

...

2.2. Z_2

$Z^0{}_2 = (1 \to ((1 \to 2 \to 3) \to (1 \to 2)))$

$Z^1{}_2 = (1 \to ((1 \to (1 \to 2) \to (1 \to 2 \to 3)) \to (1 \to (1 \to 2))))$

$Z^2{}_2 = (1 \to ((1 \to (1 \to (1 \to 2)) \to (1 \to (1 \to 2) \to (1 \to 2 \to 3))) \to (1 \to (1 \to (1 \to 2)))))$

$Z^3{}_2 = (1 \to ((1 \to (1 \to (1 \to (1 \to 2))) \to (1 \to (1 \to (1 \to 2)) \to (1 \to (1 \to 2) \to (1 \to 2 \to 3)))) \to (1 \to (1 \to (1 \to (1 \to 2))))))$

$Z^4{}_2 = (1 \to ((1 \to (1 \to (1 \to (1 \to (1 \to 2)))) \to (1 \to (1 \to (1 \to (1 \to 2))) \to (1 \to (1 \to (1 \to 2)) \to (1 \to (1 \to 2) \to (1 \to 2 \to 3))))) \to (1 \to (1 \to (1 \to (1 \to (1 \to 2)))))))$

$Z^5{}_2 = (1 \to ((1 \to (1 \to (1 \to (1 \to (1 \to (1 \to 2))))) \to (1 \to (1 \to (1 \to (1 \to (1 \to 2)))) \to (1 \to (1 \to (1 \to (1 \to 2))) \to (1 \to (1 \to (1 \to 2)) \to (1 \to (1 \to 2) \to (1 \to 2 \to 3)))))) \to (1 \to (1 \to (1 \to (1 \to (1 \to (1 \to 2))))))))$

...

2.3. Z_3

$Z^0{}_3 = ((1 \to 2) \to (1 \to (1 \to 2 \to 3)))$

$Z^1{}_3 = ((1 \to (1 \to 2)) \to (1 \to (1 \to (1 \to 2) \to (1 \to 2 \to 3))))$

$Z^2{}_3 = ((1 \to (1 \to (1 \to 2))) \to (1 \to (1 \to (1 \to (1 \to 2)) \to (1 \to (1 \to 2) \to (1 \to 2 \to 3)))))$

$Z^3{}_3 = ((1 \to (1 \to (1 \to (1 \to 2)))) \to (1 \to (1 \to (1 \to (1 \to (1 \to 2))) \to (1 \to (1 \to (1 \to 2)) \to (1 \to (1 \to 2) \to (1 \to 2 \to 3))))))$

$Z^4{}_3 = ((1 \to (1 \to (1 \to (1 \to (1 \to 2))))) \to (1 \to (1 \to (1 \to (1 \to (1 \to (1 \to 2)))) \to (1 \to (1 \to (1 \to (1 \to 2))) \to (1 \to (1 \to (1 \to 2)) \to (1 \to (1 \to 2) \to (1 \to 2 \to 3)))))))$

$Z^5{}_3 = ((1 \to (1 \to (1 \to (1 \to (1 \to (1 \to 2)))))) \to (1 \to (1 \to (1 \to (1 \to (1 \to (1 \to (1 \to 2))))) \to (1 \to (1 \to (1 \to (1 \to (1 \to 2)))) \to (1 \to (1 \to (1 \to (1 \to 2))) \to (1 \to (1 \to (1 \to 2)) \to (1 \to (1 \to 2) \to (1 \to 2 \to 3))))))))$

...

2.4. Z_4

$Z^0{}_4 = ((1 \to 2) \to ((1 \to 2 \to 3) \to 1))$

$Z^1{}_4 = ((1 \to (1 \to 2)) \to ((1 \to (1 \to 2) \to (1 \to 2 \to 3)) \to 1))$

$Z^2{}_4 = ((1 \to (1 \to (1 \to 2))) \to ((1 \to (1 \to (1 \to 2)) \to (1 \to (1 \to 2) \to (1 \to 2 \to 3))) \to 1))$

$Z^3{}_4 = ((1 \to (1 \to (1 \to (1 \to 2)))) \to ((1 \to (1 \to (1 \to (1 \to 2))) \to (1 \to (1 \to (1 \to 2)) \to (1 \to (1 \to 2) \to (1 \to 2 \to 3)))) \to 1))$

$Z^4{}_4 = ((1 \to (1 \to (1 \to (1 \to (1 \to 2))))) \to ((1 \to (1 \to (1 \to (1 \to (1 \to 2)))) \to (1 \to (1 \to (1 \to (1 \to 2))) \to (1 \to (1 \to (1 \to 2)) \to (1 \to (1 \to 2) \to (1 \to 2 \to 3))))) \to 1))$

$Z^5{}_4 = ((1 \to (1 \to (1 \to (1 \to (1 \to (1 \to 2)))))) \to ((1 \to (1 \to (1 \to (1 \to (1 \to (1 \to 2))))) \to (1 \to (1 \to (1 \to (1 \to (1 \to 2)))) \to (1 \to (1 \to (1 \to (1 \to 2))) \to (1 \to (1 \to (1 \to 2)) \to (1 \to (1 \to 2) \to (1 \to 2 \to 3)))))) \to 1))$

...

2.5. Z_5

$Z^0{}_5 = ((1 \to 2 \to 3) \to (1 \to (1 \to 2)))$

$Z^1{}_5 = ((1 \to (1 \to 2) \to (1 \to 2 \to 3)) \to (1 \to (1 \to (1 \to 2))))$

$Z^2{}_5 = ((1 \to (1 \to (1 \to 2)) \to (1 \to (1 \to 2) \to (1 \to 2 \to 3))) \to (1 \to (1 \to (1 \to (1 \to 2)))))$

$Z^3{}_5 = ((1 \to (1 \to (1 \to (1 \to 2))) \to (1 \to (1 \to (1 \to 2)) \to (1 \to (1 \to 2) \to (1 \to 2 \to 3)))) \to (1 \to (1 \to (1 \to (1 \to (1 \to 2))))))$

$Z^4{}_5 = ((1 \to (1 \to (1 \to (1 \to (1 \to 2)))) \to (1 \to (1 \to (1 \to (1 \to 2))) \to (1 \to (1 \to (1 \to 2)) \to (1 \to (1 \to 2) \to (1 \to 2 \to 3))))) \to (1 \to (1 \to (1 \to (1 \to (1 \to (1 \to 2)))))))$

$Z^5{}_5 = ((1 \to (1 \to (1 \to (1 \to (1 \to (1 \to 2))))) \to (1 \to (1 \to (1 \to (1 \to (1 \to 2)))) \to (1 \to (1 \to (1 \to (1 \to 2))) \to (1 \to (1 \to (1 \to 2)) \to (1 \to (1 \to 2) \to (1 \to 2 \to 3)))))) \to (1 \to (1 \to (1 \to (1 \to (1 \to (1 \to (1 \to 2))))))))$

...

2.6. Z_6

$Z^0{}_6 = ((1 \to 2 \to 3) \to ((1 \to 2) \to 1))$

$Z^1{}_6 = ((1 \to (1 \to 2) \to (1 \to 2 \to 3)) \to ((1 \to (1 \to 2)) \to 1))$

$Z^2{}_6 = ((1 \to (1 \to (1 \to 2)) \to (1 \to (1 \to 2) \to (1 \to 2 \to 3))) \to ((1 \to (1 \to (1 \to 2))) \to 1))$

$Z^3{}_6 = ((1 \to (1 \to (1 \to (1 \to 2))) \to (1 \to (1 \to (1 \to 2)) \to (1 \to (1 \to 2) \to (1 \to 2 \to 3)))) \to ((1 \to (1 \to (1 \to (1 \to 2)))) \to 1))$

$Z^4{}_6 = ((1 \to (1 \to (1 \to (1 \to (1 \to 2)))) \to (1 \to (1 \to (1 \to (1 \to 2))) \to (1 \to (1 \to (1 \to 2)) \to (1 \to (1 \to 2) \to (1 \to 2 \to 3))))) \to ((1 \to (1 \to (1 \to (1 \to (1 \to 2))))) \to 1))$

$Z^5{}_6 = ((1 \to (1 \to (1 \to (1 \to (1 \to (1 \to 2))))) \to (1 \to (1 \to (1 \to (1 \to (1 \to 2)))) \to (1 \to (1 \to (1 \to (1 \to 2))) \to (1 \to (1 \to (1 \to 2)) \to (1 \to (1 \to 2) \to (1 \to 2 \to 3)))))) \to ((1 \to (1 \to (1 \to (1 \to (1 \to (1 \to 2)))))) \to 1))$

...

Bibliographie

Aczel, Peter, Non-Well-Founded Sets. Stanford, CA, 1988

Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1975

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Bense, Max, Axiomatik und Semiotik. Baden-Baden 1981

Toth, Alfred, Die Semiotik als eine Theorie von Relationen über Relationen. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2019

Qualitative Zahlen als semiotische Zahlen

1. Im folgenden gehen wir aus von den Proto-, Deutero- und Tritozahlen der Kontexturen K = 1 bis K = 4 (Tabelle nach Kronthaler 1986, S. 34).

Protozahlen	Deuterozahlen	Tritozahlen	Kontextur
0	0	0	K = 1
----------	----------	----------	
00	00	00	
01	01	01	K = 2
----------	----------	----------	
000	000	000	
001	001	001	
—	—	010	
—	—	011	
012	012	012	K = 3
----------	----------	----------	
0000	0000	0000	
0001	0001	0001	
—	—	0010	
—	0011	0011	
0012	0012	0012	
—	—	0100	
—	—	0101	
—	—	0102	
—	—	0110	

—	—	0111	
—	—	0112	
—	—	0120	
—	—	0121	
—	—	0122	
0123	0123	0123	K = 4

2. Wie wir in Toth (2019a, b) argumentiert hatten, ist eine semiotische Relation eine Relation über Relationen, so zwar, daß eine n-adische Relation sich selbst und alle ihre Teilrelationen enthält:

ZR(.1., .2., .3.) =

1.1	1.2	1.3	1.1	1.2	1.3	1.1	1.2	1.3
			2.1	2.2	2.3	2.1	2.2	2.3
						3.1	3.2	3.3

„Mit dieser Notation wird endgültig deutlich, daß Repräsentation auf Semiotizität und Semiotizität auf Gradation der Relationalität beruht“ (Bense 1979, S. 53).

Wenn wir also von den qualitativen Zahlen statt von den quantitativen Peanozahlen ausgehen wollen, gibt es zwei Möglichkeiten qualitativer semiotischer Relationen.

2.1. Intrakontexturelle Relationen

Hier muß zusätzlich zwischen Proto-, Deutero- und Tritorelationen (P, D, T) unterschieden werden.

K = 1: $(0 \rightarrow (0 \rightarrow (0)))$

K = 2: $(00 \rightarrow (00 \rightarrow (01)))$

K = 3: $(000 \rightarrow (010 \rightarrow (011)))$

2.2. Transkontexturelle Relationen

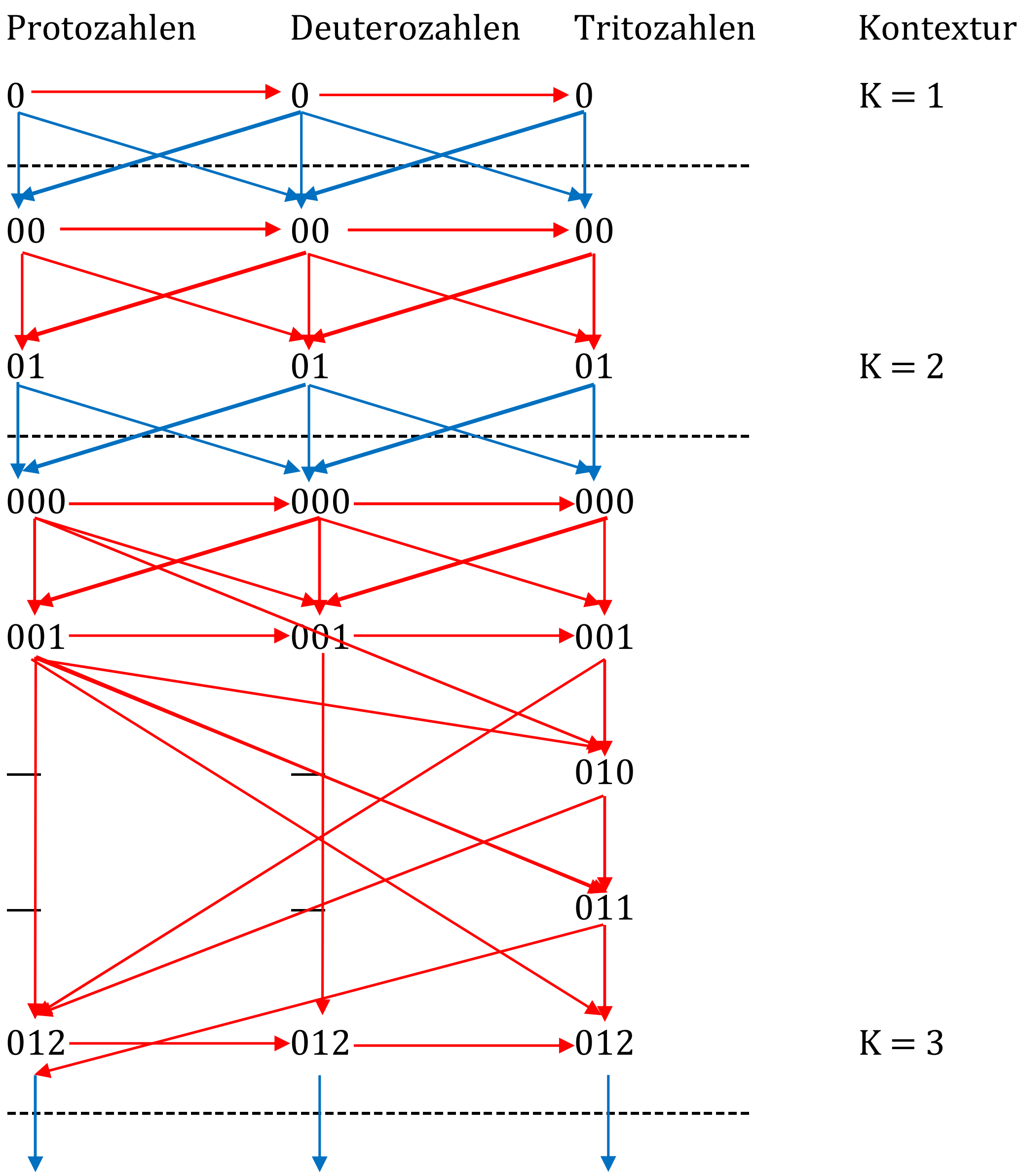
(K = 1) → (K = 2): $0 \rightarrow (00 \rightarrow (001)))$

$(K = 2) \rightarrow (K = 4) \qquad 01 \rightarrow (0100) \rightarrow ((0123)))$

$(K = 1) \rightarrow (K = 2) \rightarrow (K = 3)$: $(0 \rightarrow (01 \rightarrow (012)))$

$(K = 1) \rightarrow (K = 2) \rightarrow (K = 3) \rightarrow (K = 4)$: $(0 \rightarrow (01 \rightarrow ((010) \rightarrow (0123))))$

In der folgenden Darstellung sind die intrakontexturellen Relationen durch rote und die transkontexturellen Relationen durch blaue Pfeile eingezeichnet. Aus Gründen der Übersichtlichkeit beschränken wir uns auf K = 1 bis K = 3.



Bibliographie

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Kronthaler, Engelbert, Grundlegung einer Mathematik der Qualitäten. Frankfurt am Main 1986

Toth, Alfred, Die Semiotik als eine Theorie von Relationen über Relationen. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2019a

Toth, Alfred, Die Semiotik als Theorie gradativer Relationalität. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2019b