

Prof. Dr. Alfred Toth

Lateinische Quadrate kommutativer und nicht-kommutativer semiotischer Zahlenfolgen

1. Die drei über der Menge von Primzeichen $PZ = \{1, 2, 3\}$ möglichen semiotischen Gruppen mit den zugehörigen Strukturen

1. Gruppe (PZ, \circ_1) 2. Gruppe (PZ, \circ_2) 3. Gruppe (PZ, \circ_3)

$2 \leftrightarrow 3$ $1 \leftrightarrow 3$ $1 \leftrightarrow 2$

$1 = \text{const.}$ $2 = \text{const.}$ $3 = \text{const.}$

erlauben, da jeder semiotische Wert mit genau einem ausgetauscht wird und daher in der zugehörigen triadischen Zeichenrelation

$ZR = (a.b, c.d, e.f)$

a, c und e paarweise verschieden sind, genau 6 Permutationen der triadischen Werte:

$\wp(PZ) = \{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 1, 3), (3, 1, 2), (3, 2, 1)\}$,

2. Geht man hingegen von den 24 möglichen nicht-kommutativen Quasigruppen über der triadischen Zeichenrelation aus, so erhält man im nicht-kommutativen Fall die folgenden 24 Permutationen:

(1, 1, 1) (2, 1, 1) (3, 1, 1)

(1, 1, 2) (2, 1, 2) (3, 1, 2)

(1, 1, 3) (2, 1, 3) (3, 1, 3)

(1, 2, 1) (2, 2, 1) (3, 2, 1)

(1, 2, 2) (2, 2, 2) (3, 2, 2)

| | | |
|-----------|-----------|------------|
| (1, 2, 3) | (2, 2, 3) | (3, 2, 3) |
| (1, 3, 1) | (2, 3, 1) | (3, 3, 1) |
| (1, 3, 2) | (2, 3, 2) | (3, 3, 2). |
| (1, 3, 3) | (2, 3, 3) | (3, 3, 3). |

3. Alle 24 möglichen Permutationen einer triadischen Relation (diejenigen der Gruppen sind, wie man sieht, in denjenigen der Quasigruppen eingeschlossen) kann man nun mit Hilfe von 12 lateinischen Quadraten so darstellen, daß je 2 von Ihnen entweder die gleiche Haupt- oder die gleiche Nebendiagonale haben und die 12 Quadrate in eine Gruppe mit identischer Haupt- und in eine Gruppe mit identischer Nebendiagonale zerfallen (diese für Mathematiker alles andere als besonderen Tatsachen dürften für die Semiotik dennoch von Interesse sein, vgl. Toth 2009):

3.1. Lateinische Quadrate mit identischer Hauptdiagonale

| | | |
|--|--|--|
| $\begin{array}{c ccc} \circ_1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{array}$ | $\begin{array}{c ccc} \circ_2 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{array}$ | $\begin{array}{c ccc} \circ_3 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{array}$ |
| $\begin{array}{c ccc} \circ_4 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \end{array}$ | $\begin{array}{c ccc} \circ_5 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{array}$ | $\begin{array}{c ccc} \circ_6 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \end{array}$ |

3.2. Lateinische Quadrate mit identischer Nebendiagonale

| | | |
|---|---|---|
| $\begin{array}{c ccc} \circ_7 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{array}$ | $\begin{array}{c ccc} \circ_8 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{array}$ | $\begin{array}{c ccc} \circ_9 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \end{array}$ |
| $\begin{array}{c ccc} \circ_{10} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{array}$ | $\begin{array}{c ccc} \circ_{11} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{array}$ | $\begin{array}{c ccc} \circ_{12} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \end{array}$ |

Wie man ebenfalls sogleich erkennt, sind nur die Quadrate bzw. gruppentheoretischen Tafeln der Operatoren \circ_1 bis \circ_6 kommutativ, während die Tafeln der Operatoren \circ_7 bis \circ_{12} nicht-kommutativ sind, denn z.B. haben wir dort $2 \circ_1 1 = 1 \circ_1 2 = 3$, jedoch haben wir $(2 \circ_7 1 = 2) \neq (1 \circ_7 2 = 1)$.

Würde nun jemand versuchen, ein lateinisches Quadrat aus PZ so zu konstruieren, daß sowohl die Haupt- als auch die Nebendiagonale nicht-identisch sind, indem er die Regel der paarweisen Verschiedenheit der Matrixeinträge aufhebt, vgl. z.B.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| 1 | 1 | 3 | 1 | 2 | 3 | 3 | 2 | 2 |
| 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 2 | 1 | 3 | 1 | 2 | 3 | 3, |

dann lägen allerdings keine Quasigruppen mehr vor, sondern nur noch Gruppoide. Diese sind jedoch für die Semiotik wohl bedeutungslos, da die letzte aufgehobene Limitationsregel, welche aus allgemeinen Relationen die angeblich für den Zeichenbegriff relevanten Teilklassen herausfiltert (vgl. Toth 2012a), nämlich die Auflösung der bereits von Peirce geforderten gleichen Valenz von n-aden und n-tomien, bereits von den semiotischen Quasigruppen repräsentiert wird (vgl. Toth a, b).

Literatur

Toth, Alfred, Gruppentheoretische Semiotik. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2009

Toth, Alfred, Inversen- und Dualia-Bildung bei nicht-kommutativen Zeichenrelationen. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2012a

Toth, Alfred, Zahlenfolgen nicht-abelscher semiotischer Gruppen. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2012b

14.3.2012