Prof. Dr. Alfred Toth

Kann man die Peircezahlen mit Hilfe der surrealen Zahlen begründen?

1. Die sog. surrealen oder Conway-Zahlen wurden 1974 von John Horton Conway entdeckt bzw. erfunden. Sie basieren, grob gesagt, auf einer höchst zirkulären Definition und einer dadurch ermöglichten hochgradigen Komplexität, wie sie von der Einführung der nicht-surrealen (ganzen, rationalen, reellen usw.) Zahlen her ganz unbekannt ist. Tøndering (2005, S. 6) definiert sie wie folgt:

Definition: A surreal number is a pair of sets of previously created surreal numbers. The sets are known as the "left set" and the "right set". No number of the right set may be less than or equal to any member of the left set".

Es gilt:

1. Die erste surreal Zahl ist {Ø | Ø}. Dies wird kurz als {|} geschrieben. Es gilt also 0 ≡ {|}.

2. Entsprechend gilt

{0|} ≡ -1

{0} ≡ 1

Daraus kann man bereits 61 Kombinationen bilden! Von ihnen sind allerdings nur die folgenden 17 wohlgeformt sind (aus Tøndering 2005, S. 10):

{−1 | }, { | − 1},
{1 | }, { | 1},
{−1, 0 | }, {−1 | 0}, { | − 1, 0},
{0, 1 | }, {0 | 1}, { | 0, 1},
{−1, 1 | }, {−1 | 1}, { | − 1, 1},
{−1, 0, 1 | }, {−1, 0 | 1}, {−1 | 0, 1}, { | − 1, 0, 1}.

Entsprechend 1.2. definiert man

$2 \equiv (1 \mid)$

$3 \equiv (2 \mid)$,

und man erhält auf diese Weise matürlich eine Abbildung der Peirce-Zahlen auf die surrealen Zahlen.

3. Nun sind die Subzeichen, wie bekannt, kartesische Produkte von $tdP \times ttP$ und somit „gemischte“, „gebrochene“ bzw. „inhomogene“ Kategorien wie MO, MI, IM, ... Die Anteile der Kategorien pro Subzeichen aus jedem der drei Bezüge

M = [1/4, 1/3, 1/2, 2/3, ¾, 1] = [0.25, 0.33, 0.5, 0.66, 0.75, 1]

O = [1/3, 2/5, 1/2, 2/3, 1] = [0.33, 0.4, 0.5, 0.66, 1]

I = [1/4, 3/5, ¾, 1] = [0.25, 0.6, 0.5, 0.66, 0.75, 1]

lassen sich nach Toth (2010) mit Hilfe der folgenden „Ereignismatrix“ bestimmen:

I	0	0	0	0	1	0	1	1
O	0	1	1	1	0	1	0	1
M	1	1	0	1	0	0	0	1
	¼	1/3	2/5	½	3/5	2/3	¾	1

Damit erhebt sich also die Frage, ob auch die rationalen semiotischen Zahlen ¼, 1/3, 2/5, ... auf die surrealen Zahlen abgebildet werden können. Tøndering (2005, S. 24) führte hierzu eine Funktion ein, die er sinnigerweise “Dali-Funktion” nannte und die folgende Abbildungen leistet:

$$\delta(x) = \begin{cases} \{\,|\,\} & \text{if } x = 0, \\ \{\delta(x-1)\,|\,\} & \text{if } x \text{ is an integer and } x > 0, \\ \{\,|\,\delta(x+1)\} & \text{if } x \text{ is an integer and } x < 0, \\ \{\delta(\frac{j-1}{2^k})\,|\,\delta(\frac{j+1}{2^k})\} & \text{if } x \text{ can be written as an irreducible fraction} \frac{j}{2^k}, \\ & \quad \text{where } j \text{ and } k \text{ are integers, and } k > 0. \end{cases}$$

Einfach gesprochen, ist es ja so, dass mit Hilfe des „Rechts-Links“-Operators | nur Hälften hergestellt werden. Will man also auch Drittel, Viertel, Fünftel, so wählt man entsprechend den Exponenten k des Quotienten 2 der Dali-Funktion.

Die eigenartigen surrealen Zahlen eigenen sich also zur Begründung aller Peircezahlen, d.h. von tdP, ttP und dgP., wobei zur Herstellung der rationalen Zahlen der sog. Dali-Funktor verwendt wird.

Bibliographie

Conway, John H., On Numbers and Games. 2. Aufl. 2001

Tøndering, Claus, Surreal numbers. An introduction. o.O., 2005. I: http://www.tondering.dk/claus/sur15.pdf (2005)

15.6.2010