Prof. Dr. Alfred Toth

Der semiotische Homöomorphismus zwischen Torus und Möbius-Band

Ich bin hier, mehr weiss ich nicht, mehr kann ich nicht tun. Mein Kahn ist ohne Steuer, er fährt mit dem Wind, der in den untersten Regionen des Todes bläst.

Franz Kafka, Der Jäger Gracchus (1985, S. 288)

1. Das semiotische Zehnersystem, bestehend aus den 10 Zeichenklassen und ihren 10 durch Dualisierung aus ihnen konstruierten 10 Realitätsthematiken sowie die 10 aus den Zeichenklassen durch Anwendung des Operators INV gewonnen (invertierten) Transpositionen und ihre 10 Dualisationen, total also 40 Zeichenklassen, stellen das formale Basisinventar der theoretischen Semiotik dar. Unter den 10 Zeichenklassen befindet sich die von Max Bense als eigenreale bestimmte Klasse, die als einzige Zeichenklasse dual-invariant ist, und zwar sowohl als Zeichenklasse und als Transposition:

$(3.1\ 2.2\ 1.3) \times (3.1\ 2.2\ 1.3) \equiv [[\beta°, \alpha], [\alpha°, \beta]] \times [[\beta°, \alpha], [\alpha°, \beta]]$
$(1.3\ 2.2\ 3.1) \times (1.3\ 2.2\ 3.1) \equiv [[\alpha, \beta°], [\beta, \alpha°]] \times [[\alpha, \beta°], [\beta, \alpha°]]$

Dargestellt als semiotische Chiasmen:

$[[\beta°, \alpha], [\alpha°, \beta]]$	$[[\beta°, \alpha], [\alpha°, \beta]]$	$[[\beta°, \alpha], [\alpha°, \beta]]$	$[[\beta°, \alpha], [\alpha°, \beta]]$
$[[\alpha, \beta°], [\beta, \alpha°]]$	$[[\alpha, \beta°], [\beta, \alpha°]]$	$[[\alpha, \beta°], [\beta, \alpha°]]$	$[[\alpha, \beta°], [\beta, \alpha°]]$

2. Ausserhalb des Systems der Zeichenklassen, aber als Diskriminante der kleinen semiotischen Matrix nicht ausserhalb des formalen Basisinventars der theoretischen Semiotik, steht die Genuine Kategorienklasse (3.3 2.2 1.1 × 1.1 2.2 3.3), deren Subzeichen bei der Dualisierung zwar nicht in ihrer Reihenfolge, aber in derjenigen ihrer konstituierenden Primzeichen identisch bleiben, weshalb Max Bense diese Klasse als "Eigenrealität schwächerer Repräsentation" bestimmt hatte (1992, S. 40). Auch bei der Genuinen Kategorienklasse gilt diese Eigenschaft ebenfalls für ihre Transpositionen und alle Dualisationen:

$(3.3\ 2.2\ 1.1) \times (1.1\ 2.2\ 3.3) \equiv [[\beta°, \beta°], [\alpha°, \alpha°]] \times [[\alpha, \alpha], [\beta, \beta]]$
$(1.1\ 2.2\ 3.3) \times (3.3\ 2.2\ 1.1) \equiv [[\alpha, \alpha], [\beta, \beta]] \times [[\beta°, \beta°], [\alpha°, \alpha°]]$

$[[\beta°, \beta°], [\alpha°, \alpha°]]$	$[[\alpha, \alpha], [\beta, \beta]]$	$[[\beta°, \beta°], [\alpha°, \alpha°]]$	$[[\alpha, \alpha], [\beta, \beta]]$
$[[\alpha, \alpha], [\beta, \beta]]$	$[[\beta°, \beta°], [\alpha°, \alpha°]]$	$[[\beta°, \beta°], [\alpha°, \alpha°]]$	$[[\alpha, \alpha], [\beta, \beta]]$

3. Max Bense hatte nun vorgeschlagen, “die semiotische Eigenrealität als fundamentales, universales und reales Zeichenband aufzufassen und somit auch als repräsentatives relationales Modell für einen endlosen, kontinuierlichen Zeichen-Kosmos einzuführen, der im Sinne des Möbiusschen Bandes darüber hinaus auch als ‘einseitig’ bezeichnet werden könnte” (1992, S. 54).

Damit erhebt sich generell die Frage nach der Existenz “einseitiger Polyeder” in der theoretischen Semiotik. Da das Möbius-Band als Repräsentant der semiotischen Eigenrealität die topologische Eigenschaft hat, nicht-orientierbar zu sein, semiotisch ausgedrückt:

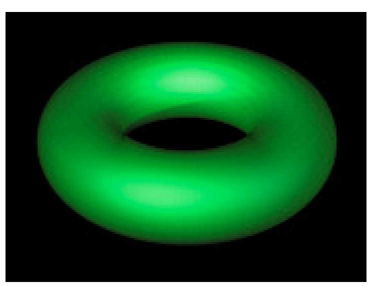
(3.1 2.2 1.3) × (3.1 2.2 1.3) × (3.1 2.2 1.3) × (3.1 2.2 1.3) × ..., bzw.
(1.3 2.2 3.1) × (1.3 2.2 3.1) × (1.3 2.2 3.1) × (1.3 2.2 3.1) × ...,

während die Genuine-Kategorienklasse als Repräsentantin der schwächeren semiotischen Eigenrealität die topologische Eigenschaft hat, zwar ebenfalls einseitig-polyedrisch, dabei aber orientierbar zu sein:

(3.3 2.2 1.1) × (1.1 2.2 3.3) × (3.3 2.2 1.1) × (1.1 2.2 3.3) × ..., bzw.
(1.1 2.2 3.3) × (3.3 2.2 1.1) × (1.1 2.2 3.3) × (3.3 2.2 1.1) × ...,

und da ferner Bense ausdrücklich auf den “Übergang von der Kategorienklasse zur Eigenrealität durch den einfachen Austausch zwischen einer Erstheit und einer Drittheit” hingewiesen hatte (1992, S. 37), stellt sich ausserdem die Frage nach dem semiotischen Modell einseitiger Polyeder in der Semiotik.

4. Während Möbius-Band, Kleinsche Flasche u.a. nicht-orientierbare topologische Modelle also nach Bense die eigenreale Zeichenklasse (3.1 2.2 1.3) illustrieren, bestimmen wir hiermit den Torus (“doughnut”) als orientierbares topologisches Modell für die “schwächer eigenreale” Kategorienklasse (3.3 2.2 1.1):



(Quelle: Wikipedia)

5. Da die eigenreale Zeichenklasse die Nebendiagonale (Determinante) der kleinen semiotischen Matrix bildet, erhält man die Genuine Kategorienklasse durch Drehung der Matrix um 90° im Uhrzeigersinn:

	1	2	3
1	1.1	1.2	1.3
2	2.1	2.2	2.3
3	3.1	3.2	3.3

$\Rightarrow$

T			
	3.1	2.1	1.1
	3.2	2.2	1.2
	3.3	2.3	1.3

Während die eigenreale Zeichenklasse mit jeder anderen Zeichenklasse durch mindestens ein Subzeichen zusammenhängt, hängt die schwächer-eigenreale Kategorienklasse nur mit 6 der 10 Zeichenklassen in höchstens einem Subzeichen zusammen:

3.1 2.1 <u>1.1</u>
3.1 2.1 1.2
3.1 2.1 1.3
3.1 <u>2.2</u> 1.2
3.1 <u>2.2</u> 1.3
3.2 <u>2.2</u> 1.2
3.2 <u>2.2</u> 1.3
3.2 2.3 1.3
3.1 2.3 1.3
<u>3.3</u> 2.3 1.3

<u>3.3</u> <u>2.2</u> <u>1.1</u>   <u>3.1</u> <u>2.2</u> <u>1.3</u>

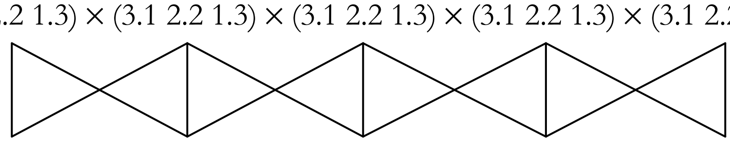
<u>3.1</u> 2.1 1.1
<u>3.1</u> 2.1 1.2
<u>3.1</u> 2.1 <u>1.3</u>
<u>3.1</u> <u>2.2</u> 1.2
<u>3.1</u> <u>2.2</u> <u>1.3</u>
3.2 <u>2.2</u> 1.2
3.2 <u>2.2</u> <u>1.3</u>
3.2 2.3 <u>1.3</u>
<u>3.1</u> 2.3 <u>1.3</u>
3.3 2.3 <u>1.3</u>

Da aber, wie von Bense (1992, S. 37) angedeutet, die beiden eigenrealen Zeichenklassen in dem folgenden Transpositionszusammenhang stehen:

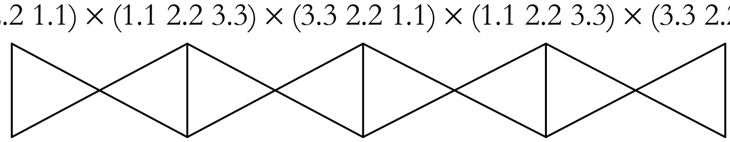
$T_{2,6}$(3.1 2.2 1.3) = (3.3 2.2 1.1) bzw.
$T_{2,6}$(3.3 2.2 1.1) = (3.1 2.2 1.3),

ergibt sich der folgende interessante topologische Zusammenhang zwischen den beiden Klassen, der übrigens auch gegenüber der Ersetzung der Zeichenklassen durch ihre Transpositionen invariant ist:

(3.1 2.2 1.3) × (3.1 2.2 1.3) × (3.1 2.2 1.3) × (3.1 2.2 1.3) × (3.1 2.2 1.3) × ...



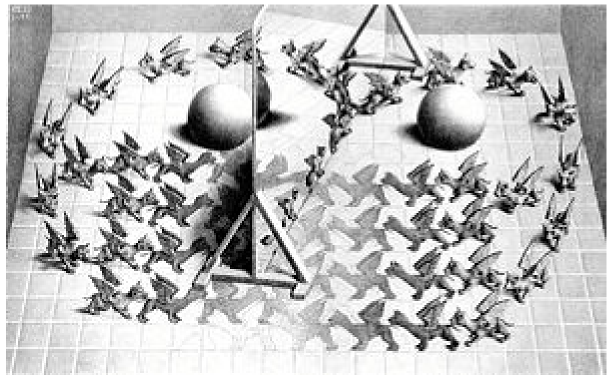
(3.3 2.2 1.1) × (1.1 2.2 3.3) × (3.3 2.2 1.1) × (1.1 2.2 3.3) × (3.3 2.2 1.1) × ...



(3.1 2.2 1.3) × (3.1 2.2 1.3) × (3.1 2.2 1.3) × (3.1 2.2 1.3) × (3.1 2.2 1.3) × ...

Hier wird also die Orthogonalität der beiden obigen transponierten Matrizen visualisiert. Nun weist mindestens eine der Graphiken M.C. Eschers, die ja auch Max Bense bei der Bestimmung des Möbius-Bandes als Modell für die Eigenrealität inspiriert hatten (1992, S.

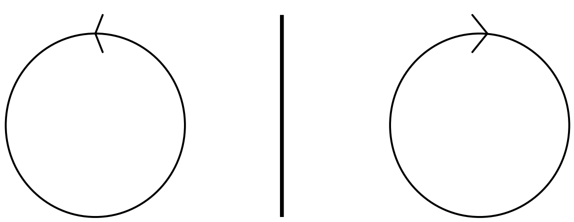
56) exakt das orthogonale topologische Verhältnis auf, wie es sich oben für den Zusammenhang von Eigenrealität-schwächere Eigenrealität-Eigenrealität ergeben hatte:



M.C. Escher, "Zauberspiegel" (1946)
(Quelle: Wikipedia)

Escher selbst kommentierte seinen "Zauberspiegel" wie folgt: "Auf einem Fliesenboden steht vertikal ein spiegelnder Schirm, aus dem ein Fabeltier geboren wird. Stück für Stück tritt es hervor, bis ein vollständiges Tier nach rechts fortläuft. Sein Spiegelbild begibt sich nach links, erweist sich jedoch als ebenso real, denn hinter dem reflektierenden Schirm kommt es in der Wirklichkeit zum Vorschein. Zuerst laufenden sie in einer Reihe hintereinander, dann paarweise, und schliesslich begegnen sich beide Ströme in Viererreihen. Gleichzeitig verlieren sie ihre Plastizität. Wie Teile eines Puzzles fügen sie sich zusammen, füllen gegenseitig die Zwischenräume aus und verbinden sich mit dem Fussboden, auf dem der Spiegel steht" (Escher 1989, S. 11)

Formal haben wir hier zwei Hetero-Zyklen mit gegenläufigem Umlaufsinn und dazwischen den reflektierenden Spiegel, also ein hierarchisch-heterarchisches polykontexturales Reflexionssystem, wie es in Kronthaler (1986, S. 158) dargestellt ist:



Im Sinne Benses fungiert dabei der Spiegel als "Fundamentalsemiose" bzw. "als normierte Führungssemiose aller Zeichenprozesse überhaupt" (1975, S. 89). Diese Funktion kann die die Fundamentalsemiose repräsentierende Genuine Kategorienklasse (3.3 2.2 1.1) aber nur dadurch wahrnehmen, dass sie transformationell mit der eigenreale Zeichenklasse (3.1 2.2 1.3) verbunden ist, denn nur mit der letzteren hängen ja sämtliche Zeichenklassen, wie oben dargestellt, in mindestens einem Subzeichen zusammen. Schwächere Eigenrealität benötigt also im Sinne der Führungssemiose immer der stärkeren (eigentlichen) Eigenrealität.

Man kann Eschers Zauberspiegel aber auch kybernetisch interpretieren, und zwar stehen die Realitäten hinter und vor dem Spiegel im Verhältnis von System und Umgebung, wobei die den Spiegel repräsentierende Genuine Kategorienklasse als "ergodische Semiose" fungiert (Bense 1975, S. 93). Auch hier müssen sowohl System als auch Umgebung zunächst durch die eigentliche Eigenrealität (3.1 2.2 1.3) repräsentiert sein, um den Zusammenhang aller 10 Zeichenklassen repräsentieren zu können. Somit könnte man also sagen, die durch die Genuine Kategorienklasse (3.3 2.2 1.1) repräsentierte ergodische Semiose hebt die Eigenrealität (3.1 2.2 1.3) vor und hinter dem Spiegel auf. Prozessual, d.h. semiosisch interpretiert, durchläuft (3.3 2.2 1.1) alle als "Ensemblewerte" aufgefassten Subzeichen der kleinen Matrix, und dies kann sie nur als Determinante dieser kleinen Matrix und indem sie mit den den geringsten und den höchsten Semiotizitätswert repräsentierenden Subzeichen (3.3, 1.1) das ganze repräsentative semiotische Spektrum abdeckt, durch den Index (2.2) aber mit der eigentlichen Eigenrealität verknüpft ist und kraft dieser Verknüpfung und der Dualinvarianz ihrer Subzeichen als schwächere Eigenrealität fungiert. Im semiotischen "Phasenraum" trifft die Genuine Kategorienklasse damit jeden Subzeichen-Punkt, womit wir ein semiotisches Analogon zum Theorem von Ehrenfest gefunden haben.

6. Eschers Zauberspiegel macht es unmöglich zu entscheiden, welche Realität – diejenige vor oder hinter dem Spiegel – die "wirkliche" Realität ist. Die Kugel rechts vom Spiegel wird zwar im Spiegel reflektiert, sie taucht aber hinter dem Spiegel wieder auf. Damit suggeriert Escher also einen Gang durch den Spiegel wie vor ihm Lewis Carroll in "Through the Looking-Glass" (1893). Die Welt hinter dem Spiegel ist eine Welt, in der die polykontexturale Grenze zwischen Zeichen und Objekt aufgehoben ist: "The pictures on the wall next the fire seemed to be all alive, and the very clock on the chimney-piece [...] had got the face of a little old main, and grinned at her" (Carroll 1982, S. 129). Ferner finden wir eine antiparallele Zeitrichtung: Während sich Alice mit der Weissen Königin unterhält, schreit diese plötzlich auf, doch sie sticht sich erst hinterher mit ihrer Brosche, und erst am Ende blutet sie (Carroll 1982, S. 176).

Wir befinden uns also hinter dem Spiegel in einer Welt, die eine "anti-dromic time axis" hat, wie sie Rudolf Kaehr als typisch für eine auf dem polykontexturalen Diamanten-Modell basierende Welt bestimmt hat (2007, S. 1 ff.):

$$\begin{tikzcd}
 & \omega4 & & \alpha4 \arrow[ll, "l"'] & \\
\alpha1 \arrow[r, "f"] & \omega1 & o & \alpha2 \arrow[r, "g"] & \omega2 \\
 & \alpha3 \arrow[rr, "fg"] & & \omega3 &
\end{tikzcd}$$

Wenn wir mit Toth (2008a, S. 36) den mittleren Teil des Diamanten, d.h. die "Arena" der noch nicht komponierten Morphismen und Hetero-Morphismen, dreidimensional als Torus interpretieren, dann repräsentiert dieser in Übereinstimmung mit dem oben Gesagten die Genuine Kategorienklasse (3.3 2.2 1.1) und damit den Spiegel in Eschers Bild und in Carrols Roman. Die polykontextural-antidromische Welt hinter dem Spiegel wird dann durch die

Arena der komponierten Hetero-Morphismen im oberen Teil des Diamanten und die monokontextural-lineare Welt vor dem Spiegel durch die Arena der komponierten Morphismen repräsentiert. Sowohl den oberen wie den unteren Teil des Diamanten müssen wir somit durch die eigenreale Zeichenklasse (3.1 2.2 1.3) repräsentieren, denn die komponierten Morphismen und Hetero-Morphismen sind wie die Zahlen und die Zeichen "aus sich selbst zusammengesetzt" (vgl. Bense 1992, S. 5).

Nun hatten wir in einer früheren Arbeit (Toth 2008b) nachgewiesen, dass sich die Kompositionen einer Zeichenklasse und ihrer Transposition in Form eines semiotischen Diamanten darstellen lassen. Die Diamanten für die eigenreale Zeichenklasse und für die Genuine Kategorienklasse sind:

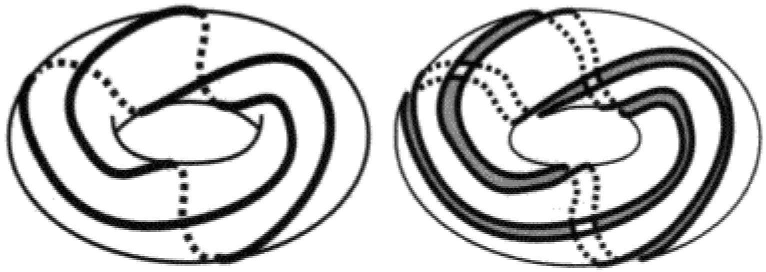
(1.1 2.2 3.3)
$[[\alpha, \alpha], [\beta, \beta]]$
$\leftarrow$
$[\beta°, \alpha]$ $[\alpha°, \beta]$
(3.3 $\rightarrow$ 2.2) $\circ$ (2.2 $\rightarrow$ 1.1)
$[[\beta°, \beta°], [\alpha°, \alpha°]]$
$\rightarrow$
(3.3 2.2 1.1)

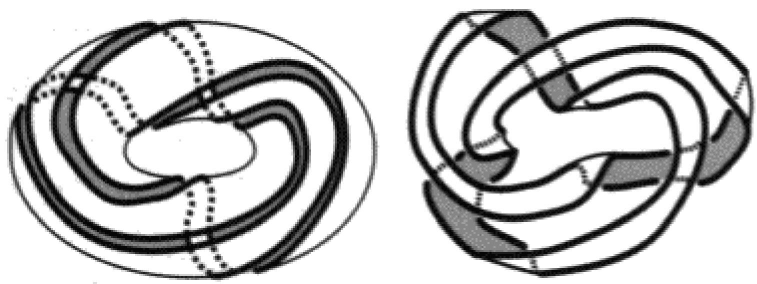
(1.3 2.2 3.1)
$[[\alpha, \alpha], [\beta, \beta]]$
$\leftarrow$
(3.1 $\rightarrow$ 2.2) $\circ$ (2.2 $\rightarrow$ 1.3)
$[[\beta°, \alpha], [\alpha°, \beta]]$
$\rightarrow$
(3.1 2.2 1.3)

Daraus folgt also, dass der obere Teil des semiotischen Diamanten durch die transponierte eigenreale Zeichenklasse (1.3 2.2 3.1) repräsentiert werden muss. Wir können damit die semiotisch-logisch-kybernetisch-topologische Struktur des allgemeinen Diamanten-Modells wie folgt angeben:

(1.3 2.2 3.1)	Rejektion	Umgebung/System	Möbius-Band
(3.3 2.2 1.1) × (1.1 2.2 3.3)	Proposition-Opposition	ergodische Semiose	Torus
(3.1 2.2 1.3)	Akzeptanz	System/Umgebung	Möbiusband

7. Nun ist aus der Topologie bekannt, dass Torus und Möbiusband zueinander homöomorph sind, wobei bei der Transformation eines Torus in ein Möbiusband oder eines ihm isomorphen Polyeders die Orientierbarkeit verloren geht bzw. bei der umgekehrten Transformation gewonnen wird (vgl. Vappereau o.J., Wagon 1991):

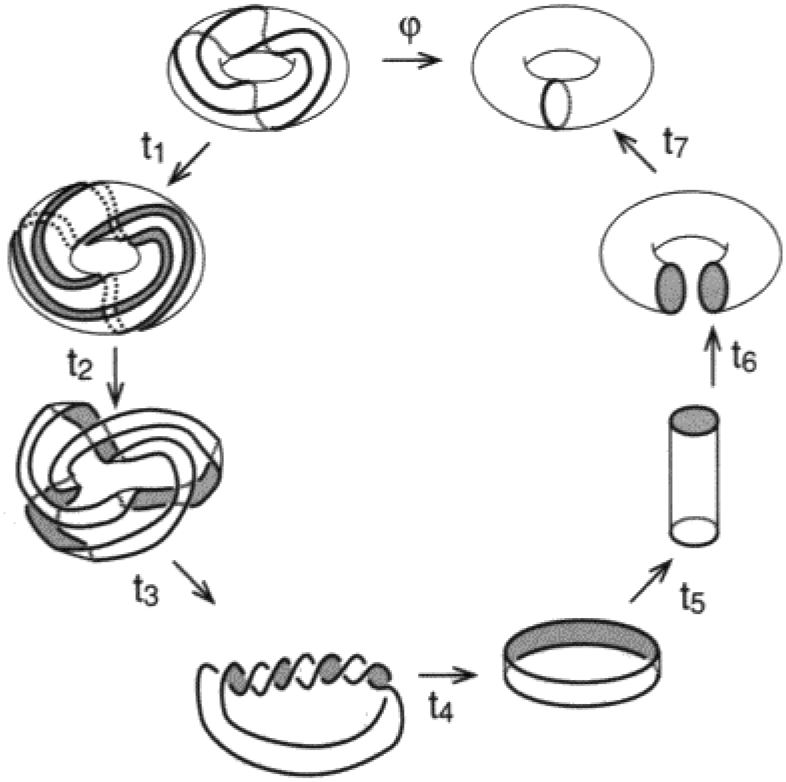




Da semiotische Diamanten isomorph zu semiotischen Chiasmen sind (Toth 2008c) – ebenso wie logische und mathematische Diamanten und Chiasmen -, können wir also die semiotischen Transformationen der den Torus repräsentierenden Genuinen Kategorienklasse (3.3 2.2 1.1) und der die Möbiusbänder repräsentierenden eigenrealen Zeichenklasse (3.1 2.2 1.3) sowie ihrer Transpositionen und Dualisationen mit der folgenden Chiasmen-Struktur repräsentieren:

$[[\beta°, \alpha], [\alpha°, \beta]]$	$[[\beta°, \alpha], [\alpha°, \beta]]$	$[[\beta°, \beta°], [\alpha°, \alpha°]]$	$[[\alpha, \alpha], [\beta, \beta]]$
$[[\alpha, \beta°], [\beta, \alpha°]]$	$[[\alpha, \beta°], [\beta, \alpha°]]$	$[[\alpha, \alpha], [\beta, \beta]]$	$[[\beta°, \beta°], [\alpha°, \alpha°]]$
$[[\beta°, \alpha], [\alpha°, \beta]]$	$[[\beta°, \alpha], [\alpha°, \beta]]$	$[[\beta°, \beta°], [\alpha°, \alpha°]]$	$[[\alpha, \alpha], [\beta, \beta]]$
$[[\alpha, \beta°], [\beta, \alpha°]]$	$[[\alpha, \beta°], [\beta, \alpha°]]$	$[[\beta°, \beta°], [\alpha°, \alpha°]]$	$[[\alpha, \alpha], [\beta, \beta]]$

Die zur semiotischen Struktur äquivalente topologisch-homöomorphe Struktur ist:



Dabei sieht man also, dass bei der homöomorphen Abbildung eines Torus auf ein Möbiusband, dieses Möbiusband ebenfalls homöomorph in ein gewöhnliches Band transformiert werden kann, d.h. in ein zweiseitiges Band, das ja im Einklang mit Bense (1992, S. 54 ff.) die übrigen 9 Zeichenklassen (sowie deren Transpositionen und alle Dualisationen) repräsentiert, da bei diesen die invers koordinierten Realitätsthematiken nicht identisch mit den Zeichenklassen und daher nicht eigenreal sind, vgl. z.B. (3.2 2.2 1.3 × 3.1 2.2 2.3). Diese gewöhnlichen Bänder oder Schleifen repräsentieren daher das mit der eigenrealen Zeichenklasse (3.1 2.2 1.3) in je mindestens einem Subzeichen zusammenhängende System der theoretischen Semiotik, das im semiotischen Diamant-Modell einmal monokontextural-linear und einmal polykontextural-antiparallel, d.h. durch ihre Transpostion repräsentiert ist, wobei die beiden zueinander inversen Eigenrealitäten durch die ergodische Führungssemiose der Genuinen Kategorienklasse im Sinne schwächerer Eigenrealität im kategorietheoretischen Kernbereich des Diamanten im Sinne eines topologischen Zusammenhanges zusammengehalten und einander semiotisch vermittelt werden.

Literatur

Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1975
Bense, Max, Die Eigenrealität der Zeichen. Baden-Baden 1992
Carroll, Lewis, Through the Looking-Glass. Oxford 1982
Escher, M.C., Graphik und Zeichnungen. Berlin 1989
Kaehr, Rudolf, Toward Diamonds. Glasgow 2007
Kafka, Franz, Sämtliche Erzählungen, hrsg. von Paul Raabe. Frankfurt am Main 1985

Kronthaler, Engelbert, Grundlegung einer Mathematik der Qualitäten. Frankfurt am Main 1986
Toth, Alfred, In Transit. Klagenfurt 2008 (= 2008a)
Toth, Alfred, Semiotische Diamanten. 2008b (= Kap. 24)
Toth, Alfred, Strukturen semiotischer Chiasmen. 2008c (= Kap. 25)
Vappereau, Jean-Michel, Homöomorphismen des Torus. http://www.lituraterre.org/Illettrismus_psychoanalyse_und_topologie-Homoomorphismen_des_torus.htm
Wagon, Stan, Rotating Circles to Produce a Torus or Möbius Strip. In: ders., Mathematica in Action. 2. Aufl. New York 1991, S. 229-232