**Prof. Dr. Alfred Toth**

# Zeichendefinitionen mit surrealen Zahlen

1. Man überlege sich folgendes: Die übliche Definition des Peirceschen Zeichens (vgl. Bense 1979, S. 53, 67)

$ZR = (M, (M \rightarrow O), (M \rightarrow O \rightarrow I)$

kann man erstens in der Form

$Z = {}^{3}R({}^{1}M, {}^{2}O, {}^{3}I)$

ausdrücken. Dabei herrscht Isomorphie zwischen (M, O, I) und (1, 2, 3), d.h. es wird davon ausgegangen, dass die drei Peanozahlen in einer Nachfolgerrelation stehen, so dass M, O und I also zugleich für Kardinalzahlen, Relationen und Mengen stehen. Nun sind aber im Grunde die Qualitäten von 1, 2, 3 belanglos, was zählt, ist die Wertigkeit oder Valenz, d.h. die Qualitäten der Relationen. Anders gesagt, wir könnten genauso gut z.B.

$Z = {}^{3}R({}^{1}3, {}^{2}6, {}^{3}9) \sim {}^{3}R({}^{1}3, {}^{2}6, {}^{3}9) \sim {}^{3}R({}^{1}25, {}^{2}39, {}^{3}7) \sim ...$

schreiben.

2. Die sog. surrealen oder Conway-Zahlen wurden 1974 von John Horton Conway entdeckt bzw. erfunden. Sie bieten, grob gesagt, eine Möglichkeit, die Umgebung reeller Zahlen in einem viel dichteren Kontinuum zu untersuchen als dies mit Hilfe der Peano-Nachfolger-Beziehung möglich ist. (Dies erinnert also in gewisser Hinsicht an die transzendenten Zahlen.). Dabei werden surreal Zahlen zirkulär definiert:

Definition: Eine surreal Zahl ist ein Paar von Mengen vorgängig konstruierter surrealer Zahlen. Die Mengen heissen „linke” und “rechte” Menge. Keine Zahl der rechten Mengen soll kleiner oder gleich einem Element der linke Menge sein.

2.1. Die erste surreal Zahl ist {Ø | Ø}. Dies wird kurz als {|} geschrieben. Es gilt also 0 ≡ {|}. Möchte man die ersten drei ganzen surrealen Zahlen ungleich 0 entsprechend den reellen Zahlen einführen, so kann man das wie folgt tun:

1 ≡ {0|}

2 ≡ {1|}

3 ≡ {2|}

Neben diesen von den reellen Zahlen her kopierten Definitionen bieten aber die surrealen Zahlen noch eine sehr grosse Menge weiterer, z.B.

1 ≡ {0|2}, {0|3}, ..., {0|ω}

2 ≡ {0|3}, {1|4}, ..., {1|ω},

3 ≡ {0|4}, {1|5}, ..., {2|ω},

wobei diese Mengen, wie oben im Falle der Peano-Zahlen, natürlich für die entsprechenden Relationen stehen. Die Überlegung dabei ist, dass z.B. bei

$a \subset b \subset c \subset d \subset e$

natürlich wegen Transitivität auch $a \subset c$, $c \subset e$, $b \subset e$ usw. gilt, so dass die topologischen Umgebung der Zahlen bestehen bleibt, auch wenn einige Glieder der „Kette" herausgenommen werden. Im Falle der surrealen Zahl 3 gilt also z.B.

3 ≡ $^{3}${0|4}, $^{3}${1|5}, ..., $^{3}${2|ω}, ...,

auch wenn es schwer vorstellbar ist, dass eine Relation zwischen 2 und der ersten transfiniten Ordinalzahl triadisch ist.

Gerade hierin liegt aber das gewaltige semiotische Potential der surrealen Zahlen, denn geht man von 3-adischen Relationen weiter hinauf zu 4-adischen, 5.-adischen, 6-adischen usw..

Wie schnell sich die relationalen Strukturen verändern und erweitern, erkennt man schon für n = 4, 5, 6, die ich in meinem Buch „Zwischen den Kontexturen“ (Klagenfurt 2007) untersucht hatte:

Für die tetradische Semiotik können wir folgende Ergebnisse und Probleme festhalten:

1. Bei den triadischen Thematisationen treten erstmals solche vom Typ $X^mY^m \leftarrow Z^{2m}$ bzw $Z^{2m} \rightarrow X^mY^m$ auf. Hier wurde die Thematisationsrichtung gemäß der größten Frequenz einer einzelnen Kategorie festgelegt.

2. Während die Sandwiches der dyadischen Thematisationen vom Typ $X^m \leftrightarrow Y^m$ sind, sind diejenigen der triadischen Thematisationen vom Typ $X^m \leftarrow Y^{2m} \rightarrow Z^m$. Da man sich auch eine (in der pentadischen Semiotik tatsächlich auftretende) Struktur $X^m \rightarrow Y^{2m} \leftarrow Z^m$ denken kann, nannten wir die erste zentrifugal und nennen wir die zweite zentripetal.

3. Tetradische Realität gibt es nur bei der (eigenrealen) Determinanten. Rein theoretisch sind folgende 10 Thematisationstypen möglich:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 15 3.0 2.1 1.2 0.3 | × | $\underline{3.0\ 2.1\ 1.2}\ 0.3$ | $3^1 2^1 1^1 \rightarrow 0^1$ |
| | | $\underline{3.0\ 2.1}\ 1.2\ 0.3$ | $3^1 2^1 \rightarrow 1^1 0^1$ |
| | | $\underline{3.0}\ 2.1\ 1.2\ 0.3$ | $3^1 \rightarrow 2^1 1^1 0^1$ |
| | | $3.0\ \underline{2.1\ 1.2\ 0.3}$ | $3^1 \leftarrow 2^1 1^1 0^1$ |
| | | $3.0\ 2.1\ \underline{1.2\ 0.3}$ | $3^1 2^1 \leftarrow 1^1 0^1$ |
| | | $3.0\ 2.1\ 1.2\ \underline{0.3}$ | $3^1 2^1 1^1 \leftarrow 0^1$ |
| | | $\underline{3.0}\ 2.1\ 1.2\ \underline{0.3}$ | $3^1 \rightarrow 2^1 1^1 \leftarrow 0^1$ |
| | | $3.0\ \underline{2.1\ 1.2}\ 0.3$ | $3^1 \leftarrow 2^1 1^1 \rightarrow 0^1$ |
| | | $3.0\ \underline{2.1}\ 1.2\ 0.3$ | $3^1 \leftarrow 2^1 \rightarrow 1^1 0^1$ |
| | | $3.0\ 2.1\ \underline{1.2}\ 0.3$ | $3^1 2^1 \leftarrow 1^1 \rightarrow 0^1$ |

Für die pentadische Semiotik können wir folgende Ergebnisse und Probleme festhalten:

1. Neben dyadischen und triadischen treten erwartungsgemäß nun tetradische Thematisationstypen auf.

2. Bei den triadischen Thematisationen tauchen Typen der Form $X^m Y^m \leftarrow Z^n$ bzw. $Z^n \rightarrow X^m Y^m$ mit $n \leq 3$ auf. An Sandwich-Thematisationen erscheinen nun zentrifugale der Form $X^m \leftarrow Y^n \rightarrow Z^m$ neben zentripetalen der Form $X^m \rightarrow Y^n \leftarrow Z^m$.

3. Bei den tetradischen Thematisationen treten Typen der Form $X^m Y^m Z^m \leftarrow A^n$ bzw. $A^n \rightarrow X^m Y^m Z^m$ auf. Als neuer Typ von Sandwich-Thematisationen erscheinen linksmehrfache Sandwiches der Form $X^m Y^m \leftarrow A^n \rightarrow Z^m$ sowie rechtsmehrfache der Form $X^m \leftarrow A^n \rightarrow Y^m Z^m$, die bereits in der tetradischen Realität der Tetratomischen Tetraden erstmals auftauchten.

4. Pentadische Realität gibt es nur bei der (eigenrealen) Determinanten.

5. Als wichtigstes Resultat ergibt sich jedoch, daß die zu erwartenden Pentatomischen Pentaden (dyadischer, triadischer und tetradischer Thematisation) nicht konstruierbar sind, da die Regel zur Bildung Trichotomischer Triaden, die noch bei den Tetratomischen Tetraden Anwendung fand, hier offenbar nicht mehr anwendbar ist, da von den zahlreichen neu auftretenden Sandwiches nicht klar ist, ob und wie sie in die Pentatomischen Pentaden integriert sind.

Für die hexadische Semiotik können wir schließlich folgende Ergebnisse und Probleme festhalten:

1. Erwartungsgemäß treten dyadischen, triadischen und tetradischen nun auch pentadische Thematisationstypen auf.

2. Bei den dyadischen Thematisationen treten Sandwiches unklarer Thematisationsrichtung der Form $X^m \leftrightarrow Y^m$ auf.

3. Bei den triadischen Thematisationen sind die Thematisationsrichtungen im Grunde unklar. Versuchsweise könnten drei Gruppen gebildet werden: 1. Solche, deren linke Kategorie die Gestalt $X^1$ hat. 2. Solche, deren rechte Kategorie die Gestalt

$X^1$ hat. 3. Solche, deren mittlere Kategorie die Gestalt $X^1$ hat, die aber weder zu 1. noch zu 2. gehören (Sandwiches). Ausdifferenzierungen und andere Gruppierungen sind aber möglich. Die triadischen Sandwiches der Form $X^m \leftrightarrow Y^n \leftrightarrow Z^m$ weisen, wie schon die dyadischen, unklare Thematisationsrichtung auf.

4. Für die tetradischen Thematisationen gilt das zu den triadischen Gesagte. Auch die tetradischen Sandwiches der Form $A^m \leftrightarrow X^n Y^n \leftrightarrow B^m$ weisen, wie bereits die dyadischen und die triadischen, unklare Thematisationsrichtung auf.

5. Für die pentadischen Thematisationen gilt das zu den tetradischen Gesagte.

6. Hexadische Realität gibt es nur bei der (eigenrealen) Determinanten.

7. Für die zu erwartenenden Hexatomischen Hexaden gilt das zu den Pentatomischen Pentaden Gesagte, nur daß hier noch mehr Verwirrung herrscht.

Grundsätzlich ist zu kritisieren, dass höhere als n=3-adische Strukturen in der Semiotik nie systematisch untersucht wurden wegen der faslifizierbaren Behauptung Peirces, dass alle n > 3-adischen Strukturen auf n = 3-adische zurückführbar seien. Die relationalen Strukturen der höherwertigen Semiotiken beweisen das Gegenteil. Bechränkt man sich ferner auf rein syntaktische Zusammenhänge, kann man ferner das Theorem von Schröder anwenden, und alle 3-adischen Relationen lassen sich dann auf 2-adische zurückführen (hierauf hat auch R. Kaehr kürzlich hingewiesen). Die letzte Konsequenz aus der Einführung der surrealen Zahlen in die Semiotik besteht demnach gerade darin, diese bisher ganz ungeahnten relationalen Strukturen freizulegen.

**Bibliographie**

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Conway, John H., Numbers and Games. 2. Aufl. 1981

Toth, Alfred, Kann man die Peircezahlen mit Hilfe der surrealen Zahlen begründen? In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics (2010)

Toth, Alfred, Zwischen den Kontexturen. Klagenfurt 2007

16.6.2010