Prof. Dr. Alfred Toth

n-Spuren über austauschbaren Domänen und Codomänen

1. In Toth (2009a) hatten wir gezeigt, dass man, wenn man Domänen und Codomänen von 1-Objekten austauscht, 8 verschiedene Morphismen erhält:

1. $(A \rightarrow B)$	5. $(A \rightleftarrows B)$
2. $(A \leftarrow B)$	6. $(A \leftrightarrows B)$
3. $(B \rightarrow A)$	7. $(B \rightleftarrows A)$
4. $(B \leftarrow A)$	8. $(B \leftrightarrows A)$

Da man Morphismen in Spuren übersetzen kann (Toth 2009e), haben wir

1. $(A_{\rightarrow B})$	5. $(A_{\rightleftarrows B})$
2. $(A_{\leftarrow B})$	6. $(A_{\leftrightarrows B})$
3. $(B_{\rightarrow A})$	7. $(B_{\rightleftarrows A})$
4. $(B_{\leftarrow A})$	8. $(B_{\leftrightarrows A})$

Wir haben also z.B. für das Subzeichen (2.3)

1. $(2_{\rightarrow 3})$	9. $(2_{\rightleftarrows 3})$
2. $(2_{\leftarrow 3})$	10. $(2_{\leftrightarrows 3})$
3. $(3_{\rightarrow 2})$	11. $(3_{\rightleftarrows 2})$
4. $(3_{\leftarrow 2})$	12. $(3_{\leftrightarrows 2})$
5. $\times(2_{\rightarrow 3}) = (3_{\rightarrow 2})$	13. $\times(2_{\rightleftarrows 3}) = (3_{\leftrightarrows 2})$
6. $\times(2_{\leftarrow 3}) = (3_{\leftarrow 2})$	14. $\times(2_{\leftrightarrows 3}) = (3_{\rightleftarrows 2})$
7. $\times(3_{\rightarrow 2}) = (2_{\rightarrow 3})$	15. $\times(3_{\rightleftarrows 2}) = (2_{\leftrightarrows 3})$
8. $\times(3_{\leftarrow 2}) = (2_{\leftarrow 3})$	16. $\times(3_{\leftrightarrows 2}) = (2_{\rightleftarrows 3})$

Wenn man als Objekte die von Bense (1980) eingeführten Primzeichen setzt, dann erhält man z.B. für A = 1 und B = 2:

1. $(1 \rightarrow 2) \equiv \alpha^{\rightarrow}$
2. $(1 \leftarrow 2) \equiv \alpha^{\leftarrow}$
3. $(2 \rightarrow 1) \equiv \alpha^{\circ\rightarrow}$
4. $(2 \leftarrow 1) \equiv \alpha^{\circ\leftarrow}$
5. $(1 \rightleftarrows 2) \equiv \alpha^{\rightarrow}\alpha^{\leftarrow}$
6. $(1 \leftrightarrows 2) \equiv \alpha^{\leftarrow}\alpha^{\rightarrow}$
7. $(2 \rightleftarrows 1) \equiv \alpha^{\circ\rightarrow}\alpha^{\circ\leftarrow}$
8. $(2 \leftrightarrows 1) \equiv \alpha^{\circ\leftarrow}\alpha^{\circ\rightarrow}$
9. $\times(1 \rightarrow 2) \equiv \alpha^{\circ\rightarrow}$
10. $\times(1 \leftarrow 2) \equiv \alpha^{\circ\leftarrow}$
11. $\times(2 \rightarrow 1) \equiv \alpha^{\rightarrow}$
12. $\times(2 \leftarrow 1) \equiv \alpha^{\leftarrow}$
13. $\times(1 \rightleftarrows 2) \equiv \alpha^{\circ\rightarrow}\alpha^{\circ\leftarrow}$
14. $\times(1 \leftrightarrows 2) \equiv \alpha^{\circ\leftarrow}\alpha^{\circ\rightarrow}$
15. $\times(2 \rightleftarrows 1) \equiv \alpha^{\rightarrow}\alpha^{\leftarrow}$
16. $\times(2 \leftrightarrows 1) \equiv \alpha^{\leftarrow}\alpha^{\rightarrow}$

Die Menge der Primzeichen PZ = (.1., .2., .3.) bilden also zusammen mit den Abbildungen und Kompositionen eine semiotische 1-Kategorie (vgl. Toth 2009a-d). Zum Nachweis, dass PZ auch eine semiotische 1-Spur bildet, genüge die folgende Tabelle:

1. $(1_{\rightarrow 2}) \equiv \alpha^{\rightarrow}$
2. $(1_{\leftarrow 2}) \equiv \alpha^{\leftarrow}$
3. $(2_{\rightarrow 1}) \equiv \alpha^{\circ\rightarrow}$
4. $(2_{\leftarrow 1}) \equiv \alpha^{\circ\leftarrow}$
5. $(1_{\rightleftarrows 2}) \equiv \alpha^{\rightarrow}\alpha^{\leftarrow}$
6. $(1_{\leftrightarrows 2}) \equiv \alpha^{\leftarrow}\alpha^{\rightarrow}$
7. $(2_{\rightleftarrows 1}) \equiv \alpha^{\circ\rightarrow}\alpha^{\circ\leftarrow}$
8. $(2_{\leftrightarrows 1}) \equiv \alpha^{\circ\leftarrow}\alpha^{\circ\rightarrow}$
9. $\times(1_{\rightarrow 2}) \equiv \alpha^{\circ\rightarrow}$
10. $\times(1_{\leftarrow 2}) \equiv \alpha^{\circ\leftarrow}$
11. $\times(2_{\rightarrow 1}) \equiv \alpha^{\rightarrow}$
12. $\times(2_{\leftarrow 1}) \equiv \alpha^{\leftarrow}$
13. $\times(1_{\rightleftarrows 2}) \equiv \alpha^{\circ\rightarrow}\alpha^{\circ\leftarrow}$
14. $\times(1_{\leftrightarrows 2}) \equiv \alpha^{\circ\leftarrow}\alpha^{\circ\rightarrow}$
15. $\times(2_{\rightleftarrows 1}) \equiv \alpha^{\rightarrow}\alpha^{\leftarrow}$
16. $\times(2_{\leftrightarrows 1}) \equiv \alpha^{\leftarrow}\alpha^{\rightarrow}$

2. Nun kann man in einem nächsten Schritt die Primzeichen auf Subzeichen, d.h. auf Relationen der Form (a.b) mit a $\in$ {1., 2., 3.} und b $\in$ {.1, .2, .3}, was nichts anderes ist als die Menge der kartesischen Produkte einer 3×3-Matrix, abbilden. Allgemein haben wir dann in der Form von Kategorien

1. $(A \rightarrow (AB)) \equiv \mathrm{id}\alpha^{\rightarrow}\ \alpha^{\rightarrow}$
2. $(B \rightarrow (AB)) \equiv \alpha^{\circ\rightarrow}\ \mathrm{id}\beta^{\rightarrow}$
3. $(A \leftarrow (AB)) \equiv \mathrm{id}\alpha^{\leftarrow}\ \alpha^{\leftarrow}$
4. $(B \leftarrow (AB)) \equiv \alpha^{\circ\leftarrow}\ \mathrm{id}\beta^{\leftarrow}$
5. $((AB) \rightarrow A) \equiv \alpha^{\circ\leftarrow}\ \mathrm{id}\beta^{\leftarrow}$
9. $(A \rightleftarrows (AB)) \equiv \mathrm{id}\alpha^{\rightarrow}\ \alpha^{\rightarrow}\ \mathrm{id}\alpha^{\leftarrow}\ \alpha^{\leftarrow}$
10. $(B \rightleftarrows (AB)) \equiv \alpha^{\circ\rightarrow}\ \mathrm{id}\beta^{\rightarrow}\ \alpha^{\circ\leftarrow}\ \mathrm{id}\beta^{\leftarrow}$
11. $(A \leftrightarrows (AB)) \equiv \mathrm{id}\alpha^{\leftarrow}\ \alpha^{\leftarrow}\ \mathrm{id}\alpha^{\rightarrow}\ \alpha^{\rightarrow}$
12. $(B \leftrightarrows (AB)) \equiv \alpha^{\circ\leftarrow}\ \mathrm{id}\beta^{\leftarrow}\ \alpha^{\circ\rightarrow}\ \mathrm{id}\beta^{\rightarrow}$
13. $((AB) \rightleftarrows A) \equiv \alpha^{\circ\leftarrow}\ \mathrm{id}\beta^{\leftarrow}\ \alpha^{\circ\rightarrow}\ \mathrm{id}\beta^{\rightarrow}$

6. $((AB) \rightarrow B) \equiv \alpha^{\rightarrow}\ \mathrm{id}\beta^{\rightarrow}$ 14. $((AB) \rightleftarrows B) \equiv \alpha^{\rightarrow}\ \mathrm{id}\beta^{\rightarrow}\ \alpha^{\leftarrow}\ \mathrm{id}\beta^{\leftarrow}$

7. $((AB) \leftarrow A) \equiv \mathrm{id}\alpha^{\leftarrow}\ \alpha^{\circ\leftarrow}$ 15. $((AB) \leftrightarrows A) \equiv \mathrm{id}\alpha^{\leftarrow}\ \alpha^{\circ\leftarrow}\ \mathrm{id}\alpha^{\rightarrow}\ \alpha^{\circ\rightarrow}$

8. $((AB) \leftarrow B) \equiv \alpha^{\leftarrow}\ \mathrm{id}\beta^{\leftarrow}$ 16. $((AB) \leftrightarrows B) \equiv \alpha^{\leftarrow}\ \mathrm{id}\beta^{\leftarrow}\ \alpha^{\rightarrow}\ \mathrm{id}\beta^{\rightarrow}$

Der Vorteil dieses kategorialen Verfahrens ist, dass Subzeichen immer als kartesische Produkte ihrer Primzeichen behandelt werden und dass damit die Paradoxien der „klassischen“ semiotischen Kategorietheorie von Bense, Leopold usw. eliminiert werden können. Für diese galt nämlich z.B. (vgl. z.B. Leopold 1990)

$(.2) \rightarrow (.3) \equiv \beta$
$(1.2) \rightarrow (1.3) \equiv \beta$,

d.h. Subzeichen wurden nicht von Primzeichen unterschieden. Streng genommen verunmöglicht es dieses Verfahrens also, z.B. die Morphismen zwischen

$(1.2) \rightarrow (2.3)$

zu bestimmen. Das Verfahren

$(1.2) \rightarrow (2.3) = [[(1 \rightarrow 2), (1 \rightarrow 3)], [(2 \rightarrow 2), (2 \rightarrow 3)]] = [(\alpha, \beta\alpha), (\mathrm{id}2, \beta)]$

wurde erst in Toth (2008, S. 159 ff.) eingeführt. Ferner war es im „klassischen“ System unmöglich, zwischen Objekten und Morphismen streng zu unterscheiden, und dies ist ja gerade in der Semiotik wichtig, wo ein Subzeichen einerseits eine statische Entität, anderseits eine dynamische Semiose darstellt. Ein Subzeichen wie (2.3) ist aber nach Bense immer durch den Morphismus β zu beschreiben.

Dieselben Paradoxien vermeidt auch die Spurentheorie. Zum Aufweis der semiotischen Äquivalenz von Kategorien und Spuren und damit zur Existenz von 2-Spuren genüge wieder die folgende Tabelle:

1. $(A_{\rightarrow (AB)}) \equiv \mathrm{id}\alpha^{\rightarrow}\ \alpha^{\rightarrow}$ 9. $(A_{\rightleftarrows (AB)}) \equiv \mathrm{id}\alpha^{\rightarrow}\ \alpha^{\rightarrow}\ \mathrm{id}\alpha^{\leftarrow}\ \alpha^{\leftarrow}$

2. $(B_{\rightarrow (AB)}) \equiv \alpha^{\circ\rightarrow}\ \mathrm{id}\beta^{\rightarrow}$ 10. $(B_{\rightleftarrows (AB)}) \equiv \alpha^{\circ\rightarrow}\ \mathrm{id}\beta^{\rightarrow}\ \alpha^{\circ\leftarrow}\ \mathrm{id}\beta^{\leftarrow}$

3. $(A_{\leftarrow (AB)}) \equiv \mathrm{id}\alpha^{\leftarrow}\ \alpha^{\leftarrow}$ 11. $(A_{\leftrightarrows (AB)}) \equiv \mathrm{id}\alpha^{\leftarrow}\ \alpha^{\leftarrow}\ \mathrm{id}\alpha^{\rightarrow}\ \alpha^{\rightarrow}$

4. $(B_{\leftarrow (AB)}) \equiv \alpha^{\circ\leftarrow}\ \mathrm{id}\beta^{\leftarrow}$

5. $((AB)_{\rightarrow A}) \equiv \alpha^{\circ\leftarrow}\ \mathrm{id}\beta^{\leftarrow}$

6. $((AB)_{\rightarrow B}) \equiv \alpha^{\rightarrow}\ \mathrm{id}\beta^{\rightarrow}$

7. $((AB)_{\leftarrow A}) \equiv \mathrm{id}\alpha^{\leftarrow}\ \alpha^{\circ\leftarrow}$

8. $((AB)_{\leftarrow B}) \equiv \alpha^{\leftarrow}\ \mathrm{id}\beta^{\leftarrow}$

12. $(B_{\leftrightarrows (AB)}) \equiv \alpha^{\circ\leftarrow}\ \mathrm{id}\beta^{\leftarrow}\ \alpha^{\circ\rightarrow}\ \mathrm{id}\beta^{\rightarrow}$

13. $((AB)_{\rightleftarrows A}) \equiv \alpha^{\circ\leftarrow}\ \mathrm{id}\beta^{\leftarrow}\ \alpha^{\circ\rightarrow}\ \mathrm{id}\beta^{\rightarrow}$

14. $((AB)_{\rightleftarrows B}) \equiv \alpha^{\rightarrow}\ \mathrm{id}\beta^{\rightarrow}\ \alpha^{\leftarrow}\ \mathrm{id}\beta^{\leftarrow}$

15. $((AB)_{\leftrightarrows A}) \equiv \mathrm{id}\alpha^{\leftarrow}\ \alpha^{\circ\leftarrow}\ \mathrm{id}\alpha^{\rightarrow}\ \alpha^{\circ\rightarrow}$

16. $((AB)_{\leftrightarrows B}) \equiv \alpha^{\leftarrow}\ \mathrm{id}\beta^{\leftarrow}\ \alpha^{\rightarrow}\ \mathrm{id}\beta^{\rightarrow}$

3. So kann man nun weiterfahren und nach 1-Kategorien und 2-Kategorien auch höhere semiotischen Kategorien und ihnen entsprechend höhere n-Spuren bilden, z.B.

1-Kat.: {(PZ → PZ), (SZ → SZ), (ZKL/RTH → ZKL/RTH), ...}
2-Kat: {(PZ → SZ), (PZ → ZKL/RTH), (PZ → Trich. Tr.)}
3-Kat.: {(SZ → ZKL/RTH), (SZ → Tr.Tr.)}
4-Kat.: {(ZKL/RTH → Tr. Tr.)}

Bibliographie

Bense, Max, Die Einführung der Primzeichen. In: Ars Semeiotica 3/3, 1980, S. 287-294

Leopold, Cornelie, Kategorietheoretische Konzeption der Semiotik. In: Semiosis 57/58, 1990, S. 93-100

Toth, Alfred, Semiotische Strukturen und Prozesse. Klagenfurt 2008

Toth, Alfred, Semiotische Kategorien und Bikategorien I. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, http://www.mathematical-semiotics.com/pdf/Kat.%20u.%20Bikat..pdf (2009a)

Toth, Alfred, Semiotische Kategorien und Bikategorien II. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, http://www.mathematical-semiotics.com/pdf/Kat.%20und%20Bikat.%20II.pdf (2009b)

Toth, Alfred, Übersicht über semiotische n-Kategorien. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, http://www.mathematical-semiotics.com/pdf/Sem.%20n-Kateg..pdf (2009c)

Toth, Alfred, Zeichenklassen, definiert über austauschbaren Domänen und Codomänen. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics (erscheint, 2009d)

Toth, Alfred, Zur spurentheoretischen Begründung der semiotischen Basistheorie. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics (erscheint, 2009e)

25.10.2009